ЛЕКЦИЯ 1.

Abstract. Понятие симметрической степени. Основные структуры на множестве симметрических степеней. Примеры.

Пусть X — топологическое пространство. На его декартовой степени X^n действует перестановками точек симметрическая группа Σ_n. Фактор (пространство орбит) X^n по этому действию, с естественной топологией, называется n-ой симметрической степенью X и обозначается $X^{(n)}$. Иными словами, элементы $X^{(n)}$ это наборы $(x_1,\dots,x_n)$ точек пространства X, не обязательно различных, с точностью до порядка; мы будем обозначать такие наборы ("мультимножества") символом $((x_1,\dots,x_n))$.

Операция перехода от X к $X^{(n)}$ является функтором на категории топологических пространств: всякому непрерывному отображению $f: X\to Y$ соответствует непрерывное отображение $f^{(n)}: X^{(n)}\to Y^{(n)}$ (полученное применением f к каждой точке мультимножества), причем $(fg)^{(n)} = f^{(n)}g^{(n)}$.

Можно также представить $X^{(n)}$ как множество выражений вида $n_1x_1+\dots+n_kx_k$, где $n_1,\dots,n_k$ — натуральные числа, удовлетворяющие равенству $n_1+\dots+n_k=n$, а $x_1,\dots,x_k$ — *различные* точки пространства X. Тем самым симметрическая степень $X^{(n)}$ представлена в виде объединения непересекающихся стратов $X^{(n)}_\mu$, нумеруемых разбиениями μ числа n (т.е. представлениями вида $n=n_1+\dots+n_k$ числа n в виде неупорядоченной суммы натуральных слагаемых). Если длина (количество слагаемых) разбиения μ равна k, то для страта $X^{(n)}_\mu$ имеется естественное отображение в страт $X^{(k)}_{(1,1,\dots,1)}$, получаемое "стиранием" всех кратностей. Это отображение является накрытием, количество листов которого равно $k!/\#\operatorname{Aut}(n_1,\dots,n_k)$ (в знаменателе стоит количество перестановок индексов, сохраняющих набор $(n_1,\dots,n_k)$).

Для всяких $a,b\in\mathbb{N}$ имеется естественное отображение $m_{a,b}: X^{(a)}\times X^{(b)}\to X^{(a+b)}$, задаваемое объединением мультимножеств. Кроме того, если в пространстве X отмечена точка, то имеются естественные вложения $X^{(n)}\hookrightarrow X^{(n+1)}$, задаваемые добавлением отмеченной точки к мультимножеству. Объединение (индуктивный предел) $\bigcup_n X^{(n)}$ по всем таким вложениям обозначается $X^{(\infty)}$. Набор отображений $m_{a,b}$ превращает $X^{(\infty)}$ в коммутативный моноид.

Для справки. Имеет место такая теорема:

Теорема. *Пространство $X^{(\infty)}$ гомотопически эквивалентно $\prod_{i=1}^\infty K(H_i(X),i)$.*

Примеры вычисления симметрических степеней:

Пример 1. $\mathbb{R}^{(2)}$ гомеоморфно полуплоскости $\{(x,y)\mid x\ge y\}$; общая симметрическая степень $\mathbb{R}^{(n)}$ — замкнутому ортанту $\{(x_1,\dots,x_n)\mid x_1\ge x_2\ge\dots\ge x_n\}$. Разбиение ортанта на грани разных размерностей соответствует разбиению симметрической степени на страты, соответствующие разбиениям числа n.

Пример 2. Симметрический квадрат $(S^1)^{(2)}$ гомеоморфен ленте Мебиуса. Действительно, элементами $(S^1)^{(2)}$ являются пары $((a_1,a_2))$ точек окружности. Каждой такой точке мы сопоставим пару, состоящую из середины a отрезка $[a_1,a_2]$ и хорды ℓ, проведенной через точку a перпендикулярно этому отрезку. Нетрудно видеть, что пара (a,ℓ) однозначно определяет пару $((a_1,a_2))$. С другой стороны, множество всех пар (a,ℓ) расслоено над множеством всех хорд со слоем отрезок. Множество всех хорд это $\mathbb{R}P^1=S^1$, а расслоение, как нетрудно видеть, нетривиально — повороту хорды на угол π соответствует центральная симметрия отрезка. Следовательно, множество всех пар (a,ℓ) гомеоморфно ленте Мебиуса.

Пример 3. Обобщением предыдущего примера является следующая теорема Мортона: $(S^1)^{(n)}$ при n нечетном гомеоморфно $D^{n-1}\times S^1$, а при n четном — тотальному пространству (единственного) неориентируемого расслоения над S^1 со слоем D^{n-1}. Для доказательства отождествим $S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и рассмотрим локально тривиальное расслоение $\varphi: (S^1)^{(n)}\to S^1$, сопоставляющее точке $((x_1,\dots,x_n))\in(S^1)^{(n)}$ точку $(x_1+\dots+x_n)\bmod\mathbb{Z}\in S^1$. Для всякой точки $((x_1,\dots,x_n))\in\varphi^{-1}(0)$ существует единственный представитель такой, что $x_1\le\dots\le x_n\le x_1+1$, и $x_1+\dots+x_n=0$. Отсюда следует, что слой расслоения является симплексом, т.е. гомеоморфен D^{n-1}. Отображение $((x_1,\dots,x_n))\mapsto((x_1+\frac{t}{n},\dots,x_n+\frac{t}{n}))$ переводит слой над точкой 0 в слой над точкой $y\in(0,1)$. Склейка при $t=1$ происходит по следующему отображению: $(x_1,\dots,x_n)\mapsto(x_2-1/n,\dots,x_n-1/n,x_1+1-1/n)$, которое сохраняет ориентацию при нечетном n — следовательно, в этом случае расслоение тривиально — и меняет ее при n четном, в этом случае расслоение неориентируемое.

Ситуация, однако, резко меняется, если многообразие комплексное: симметрическая степень $\mathbb{C}^{(n)}$ обладает естественной структурой n-мерного гладкого комплексного многообразия, биголоморфно эквивалентного $\mathbb{C}^n$. Действительно, точки $\mathbb{C}^{(n)}$ это наборы $z=((z_1,\dots,z_n))$ комплексных чисел. Сопоставим каждому

$z \in \mathbb{C}^{(n)}$ набор $e_1(z) = z_1 + \cdots + z_n$, $e_2(z) = z_1 z_2 + \cdots + z_{n-1} z_n$, ..., $e_n(z) = z_1 \dots z_n$ значений элементарных симметрических многочленов от $z_1, \dots, z_n$. Числа $e_i(z)$ корректно определены и по теореме Виета, в свою очередь, однозначно определяют набор $((z_1, \dots, z_n))$. Следовательно, $\mathbb{C}^{(n)} \cong \mathbb{C}^n$.

Следствием приведенной конструкции является такое утверждение:

Предложение 1. *Если X — гладкое двумерное многообразие, то $X^{(n)}$ — гладкое n-мерное многообразие размерности $2n$.*

Для справки. Можно показать, что если X — гладкое многообразие, то $X^{(n)}$ является гладким многообразием только при $n = 1$ или при $\dim X = 2$.

Эквивалентность $e : \mathbb{C}^{(n)} \to \mathbb{C}^n$ можно ограничить на подмногообразия $\mathbb{C}$:

Пример 4. Если $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то $X^{(n)}$ эквивалентно $\mathbb{C}^n \setminus \Pi$, где $\Pi \subset \mathbb{C}^n$ — гиперплоскость $e_n = 0$. Действительно, среди точек $z_1, \dots, z_n$ нет нулей тогда и только тогда, когда $e_n(z) = z_1 \dots z_n \neq 0$.

Пример 5. Более общий пример: если $X = \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$, то $X^{(n)}$ эквивалентно подмножеству в $\mathbb{C}^n$, заданному системой аффинных неравенств $a_i^n + e_1 a_i^{n-1} + e_2 a_i^{n-2} + \cdots + e_n \neq 0$, $1 \le i \le k$. Здесь теория симметрических степеней пересекается с одной из самых интересных глав геометрии — теорией конфигураций подпространств.

Пример 6. Проективный вариант предыдущей конструкции: $(\mathbb{C}P^1)^{(n)} \cong \mathbb{C}P^n$. Отображение f сопоставляет набору $(([z_1 : w_1], \dots, [z_n : w_n]))$ набор $[f_0(z,w) : \cdots : f_n(z,w)]$, где $f_i(z,w) = w_1 \dots w_n e_i(z_1/w_1, \dots, z_n/w_n)$ (нетрудно видеть, что f_i — многочлен, инвариантный относительно действия Σ_n).

Пример 7. Докажем, что $(\mathbb{R}P^2)^{(n)} = \mathbb{R}P^{2n}$. Для этого воспользуемся тем, что $\mathbb{R}P^2$ есть фактор S^2 по инволюции A, переставляющей точки, симметричные относительно центра. При отождествлении $S^2 \cong \mathbb{C}P^1$ инволюция A переходит в такое отображение: $A([z : w]) = [-\bar{w} : \bar{z}]$.

Рассмотрим теперь симметрическую степень $(\mathbb{C}P^1)^{(2n)}$. Инволюция A продолжается на нее “поточечно”, причем множество неподвижных точек инволюции A есть множество всех центрально симметричных конфигураций из $2n$ точек на сфере S^2, т.е. есть $(\mathbb{R}P^2)^{(n)}$. С другой стороны, из примера 6 следует, что $(\mathbb{C}P^1)^{(2n)} = \mathbb{C}P^{2n}$, на котором инволюция A действует так: $A([p_0 : \cdots : p_{2n}]) = [\bar{p}_{2n} : -\bar{p}_{2n-1} : \cdots : -\bar{p}_1 : \bar{p}_0]$. Можно непосредственно убедиться, что имеет место равенство $A = QZQ^{-1}$, где $Z([p_0 : \cdots : p_{2n}]) = [\bar{p}_0 : \cdots : \bar{p}_{2n}]$, а $Q([p_0 : \cdots : p_{2n}]) = [p_0 + ip_{2n} : p_{2n} + ip_0 : p_1 - ip_{2n-1} : p_{2n-1} - ip_0 : \cdots : (1 \pm i)p_n]$. Отсюда следует, что множество неподвижных точек A гомеоморфно множеству неподвижных точек B, которое есть $\mathbb{R}P^{2n}$.

Пример 8. Пусть $\mathcal{E}$ — эллиптическая кривая, т.е. фактор $\mathbb{C}/L$, где $L \subset \mathbb{C}$ — дискретная подгруппа. Рассмотрим мероморфную функцию f на $\mathcal{E}$, имеющую единственный полюс порядка $k \le n$ в точке 0 (нуле группы), и сопоставим ей набор $x(f)$ ее нулей, в который каждый нуль входит столько раз, какова его кратность, а точка 0 — $n - k$ раз. Согласно теореме Абеля, набор $x = ((x_1, \dots, x_n))$ представим в виде $z(f)$ тогда и только тогда, когда $x_1 + \cdots + x_n = 0$; при этом $x(f_1) = x(f_2)$ тогда и только тогда, когда $f_1/f_2 = const$. Тем самым, подмножество в $\mathcal{E}^{(n)}$, выделенное условием $x_1 + \cdots + x_n = 0$, есть проективизация пространства мероморфных функций с полюсом порядка не выше n в точке 0. Такая функция однозначно задается своей главной частью $a_n z^{-n} + \cdots + a_2 z^{-2} + a_1 z^{-1} + a_0$, при этом единственное ограничение на главную часть — равенство $a_1 = 0$. Тем самым указанное подмножество есть $\mathbb{C}P^{n-1}$, а все множество $\mathcal{E}^{(n)}$ есть $\mathcal{E} \times \mathbb{C}P^{n-1}$.

Для справки. Можно показать, что если X — сфера с g ручками, то при $n \ge 2g - 1$ симметрическая степень $X^{(n)}$ является тотальным пространством некоторого расслоения над $(\mathbb{C}^*)^g$ со слоем $\mathbb{C}P^{n-g}$.