ЛЕКЦИЯ 10

Краткое содержание. Схемы Гильберта точек на вложенной кривой и симметрические функции.

Хорошо известно, что кольцо Λ_n симметрических функций от n переменных $x_1, \dots, x_n$ изоморфно кольцу многочленов от n переменных $f_1, \dots, f_n$ — "базисных симметрических функций". Эти функции можно выбрать однородными; их степени (как многочленов от $x_1, \dots, x_n$) определены однозначно — равны $1, 2, \dots, n$ — но сами функции могут быть выбраны по-разному. Наиболее часто рассматривают такие возможности:

(1) $f_k = p_k(x) = \sum_{i=1}^k x_i^k$ — сумма степеней.
(2) $f_k = e_k(x) = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} x_{i_1} \dots x_{i_k}$ — элементарные симметрические многочлены.
(3) $f_k(x) = h_k(x) = \sum_{1 \le i_1 < \dots \le i_k \le n} x_{i_1} \dots x_{i_k}$ — полные симметрические функции.

Во всех этих случаях базис в кольце симметрических функций (как в векторном пространстве) составляют мономы от функций f_i, т.е. выражения вида $f_\mu = f_1^{a_1} \dots f_n^{a_n}$, где $\mu = 1^{a_1} \dots n^{a_n}$ — разбиение числа $\deg f_\nu = a_1 + 2a_2 + \dots + na_n$ на части, не превосходящие n. Иногда в качестве базиса берут еще функции $m_\nu = \frac{1}{b_0! \dots b_N!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} x_{\sigma(1)}^{\nu_1} \dots x_{\sigma(n)}^{\nu_n}$, где $\nu : \nu_1 \le \dots \le \nu_n$ — разбиение числа $\deg m_\mu$ на n частей, среди которых разрешаются нули; здесь b_s — количество слагаемых, равных s, а N — наибольшее слагаемое (нормировка выбрана так, чтобы коэффициент при каждом мономе от $x_1, \dots, x_n$ был равен 1). Очевидно, $h_k = \sum_{\nu \vdash k} m_\nu$.

Напомним конструкцию кольца Λ ("симметрических функций от бесконечного числа переменных") из лекции 8: это проективный предел колец Λ_n, связанных гомоморфизмами $\pi_n : \Lambda_n \to \Lambda_{n-1}$, где π_n заключается в подстановке $x_n = 0$. Иными словами, элементами кольца Λ являются бесконечные последовательности $u_0, u_1, u_2, \dots$, где $u_i \in \Lambda_i$ и $\pi_i(u_i) = u_{i-1}$. При гомоморфизме π_n функции p_k, e_k, h_k и m_ν переходят в функции с тем же названием; поэтому символы p_k, e_k, h_k и m_ν обозначают корректно определенные элементы кольца Λ. При этом индекс k может принимать любое целое положительное значение, а ν обозначает произвольное разбиение любого числа. Для этих элементов можно написать производящие функции:

(1) $P(z) = \sum_{k=1}^\infty p_k(x) z^k = \sum_{k=1}^\infty \sum_{\nu \vdash k} m_\nu z^k = \sum_{i=1}^\infty \frac{x_i z}{1 - x_i z}$,
(2) $E(z) = \sum_{k=1}^\infty e_k(x) z^k = \prod_{i=1}^\infty (1 + x_i z)$,
(3) $H(z) = \sum_{k=1}^\infty h_k(x) z^k = \prod_{i=1}^\infty \frac{1}{1 - x_i z}$.

Очевидно, $P(z) = z\frac{H'(z)}{H(z)} = z\frac{d}{dz} \ln H(z)$, откуда $H(z) = \exp\left(\int P(z)/z\, dz\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^\infty \frac{p_k(x) z^k}{k}\right)$ и $E(z) = \frac{1}{H(-z)} = \exp\left(\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} \frac{p_k(x) z^k}{k}\right)$.

Поскольку $\deg f_k = k$ для всех $k = 1, 2, \dots$, кольцо Λ как векторное пространство $\bigoplus_{k=0}^\infty \Lambda^{(k)}$, градуированное по общей степени, изоморфно пространству Фока; его ряд Гильберта равен $\sum_{k=0}^\infty \dim \Lambda^{(k)} z^k = \prod_{n=1}^\infty \frac{1}{1 - z^n}$.

Пусть $\nu \vdash n$, $\mu \vdash n + k$ — разбиения. Определим коэффициент $a_{\mu\nu}$ как количество частей разбиения μ, которые отличаются ровно на k от какой-либо части разбиения ν. Нетрудно видеть, что имеет место формула $p_k m_\nu = \sum_\mu a_{\mu\nu} m_\mu$.

Пусть теперь X — гладкое комплексное двумерное многообразие (поверхность), а $S \subset X$ — его одномерное комплексное подмногообразие (кривая). Произвольному разбиению $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k) \vdash n$ можно сопоставить подмножество $X_\nu^{(n)}$, состоящее из всех наборов k различных точек $x_1, \dots, x_k$ с кратностями $\nu_1, \dots, \nu_k$. Обозначим $L^\nu S = \overline{\mathcal{HC}^{-1}(S_\nu^{(n)})}$ (черта сверху означает замыкание) — подмножество в $X^{[n]}$, состоящее из всех идеалов J, носитель которых лежит в кривой S и имеет требуемую структуру (в которой, однако, точки $x_1, \dots, x_k$ могут и совпадать — замыкание !). Имеем: $\dim S_\nu^{(n)} = k$, и $\dim \mathcal{HC}^{-1}(x) = n - k$ при $x \in S_\nu^{(n)}$, откуда вытекает, что гладкая часть подмножества $L^\nu S$ имеет комплексную размерность n. Поэтому $L^\nu S$ определяет класс в гомологиях $H_{2n}(X^{[n]})$, который мы тоже обозначим $L^\nu S$.

Предложение 1. *Пусть $L_n S \subset X^{[n]}$ — множество всех идеалов, носитель которых лежит в кривой S. Тогда классы гомологий $L^\nu S$ при всевозможных $\nu \vdash n$ составляют базис в $H_{2n}(L_n S)$.*

Доказывать это утверждение мы не будем. На самом деле оно эквивалентно неприводимости $L^\nu S$ как алгебраических многообразий.

Следствие. *Множество $\Lambda_S = \bigoplus H_{2n}(L_n S)$ изоморфно, как градуированное векторное пространство, пространству Фока. Классы $L^\nu S$ составляют в нем однородный базис; соответствие $p_\nu \leftrightarrow m_\nu$ определяет изоморфизм градуированных векторных пространств Λ и Λ_S.*

В лекции 8 мы определили для каждого класса гомологий $\alpha \in H_m(X)$ семейство операторов $P_{\alpha,i} : H_k(X^{[n]}) \to H_{k+m+2i-2}(X^{[n+i]})$; здесь $i = \pm 1, \pm 2, \dots$. В частности, поскольку кривая S определяет класс в $H_2(X)$ (который мы тоже обозначим S), оператор $P_{S,i}$ действует из $H_k(X^{[n]})$ в $H_{k+2i}(X^{[n+i]})$. Кроме того, как нетрудно видеть, оператор $P_{S,i}$ сохраняет кольцо Λ_S, действуя из $H_{2n}(L_nS)$ в $H_{2(n+i)}(L_{n+i}S)$. На самом деле действие устроено так:

Предложение 2. *Пусть $\nu \vdash n$ — произвольное разбиение. Тогда имеет место равенство $P_{S,i}(L^\nu S) = \sum_{\mu \vdash (n+i)} a_{\mu\nu} L^\mu S$.*

Доказательство. Из предложения 1 вытекает, что $P_{S,i}(L^\nu S)$ должно быть линейной комбинацией классов $L^\mu S$ с $\mu \vdash (n+i)$. Для вычисления коэффициентов рассмотрим точку $J \in L^\mu S$ общего положения и ее окрестность; пусть $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$. В силу локальности можно предположить, что $X = \mathbb{C}^2$, а $S \subset X$ — прямая, заданная равенством $z_1 = 0$. В силу общности положения можно считать, что $J = J_1 \cap \dots \cap J_k$, где $J_q \subset L^{(\mu_q)}S$, то есть идеал коразмерности μ_q с носителем в единственной точке кривой S; без ограничения общности эта точка — начало координат.

Идеал $J_q \subset (\mathbb{C}^2)^{[\mu_q]}$ определяет пару коммутирующих нильпотентных операторов $B_1, B_2 : \mathbb{C}^{\mu_q} \to \mathbb{C}^{\mu_q}$ и их циклический вектор v с точностью до действия группы $\mathrm{GL}(\mu_q, \mathbb{C})$. В силу общности положения можно предположить, что вектор v является циклическим для каждого из операторов B_1, B_2 по отдельности. Тем самым векторы $v, B_1 v, B_1^2 v, \dots, B_1^{\mu_q - 1} v$ образуют базис в факторе $\mathbb{C}[z_1, z_2]/J_q$, и имеют место равенства $B_1^{\mu_q} v = 0$ и $B_2 v = R(B_1) v$ для некоторого многочлена R (степени не выше $\mu_q - 1$). Отсюда вытекает, что идеал J порожден элементами $z_1^{\mu_q}$ и $z_2 - R(z_1)$. Функции $\xi = z_1$ и $z = z_2 - R(z_1)$ можно принять за координаты на многообразии $\mathbb{C}^2$ в окрестности начала координат. Следовательно, такова же ситуация и для произвольной кривой S на поверхности X: идеал $J_q \in L^{(\mu_q)}S$ общего положения порожден двумя многочленами ξ^{μ_q} и z, где ξ и z — координаты на поверхности X в окрестности единственной точки $x \in \operatorname{supp} J$, и кривая S в окрестности этой точки задается уравнением $\xi = 0$.

Цикл $P_{S,i}(L^\nu S)$ задается проекцией на второй сомножитель пересечения двух циклов A_i и B_ν в пространстве $X^{[n]} \times X^{[n+i]}$. Точками цикла A_i являются пары идеалов (J, J') такие, что $J' \subset J$ и $\operatorname{supp} J/J'$ состоит из одной (i-кратной) точки, а точками цикла B_ν — пары (J, J'), в которых $J \in L^\nu S$. Очевидно, в общем положении $(J, J') \in A_i \cap B_\nu$ тогда и только тогда, когда идеал J' такой, как описано выше, а $J = J_1 \cap \dots \cap \tilde{J}_q \cap \dots J_k$, где идеал $\tilde{J}_q$ задается образующими $\xi^{\mu_q - i}$ и z. Отсюда вытекает, что в разложение элемента $P_{S,i}(L^\nu S)$ по базису $L^\mu S$ входят только разбиения $\mu \vdash \nu$, полученные из ν добавлением числа i из одной из его частей ν_q (с последующим переупорядочением частей, если необходимо). По определению, такое разбиение μ может быть получено из ν ровно $a_{\mu\nu}$ способами. Таким образом, для доказательства предложения нужно показать, что кратность каждой точки пересечения равна 1, то есть что циклы A_i и B_ν в точке общего положения пересекаются трансверсально.

Идеалы J и J' совпадают в окрестности всех точек, кроме x_q, так что можно без ограничения общности считать, что $\mu_q = (n+i)$, $\nu_q = (n)$, и носители всех идеалов сосредоточены в начале координат на $\mathbb{C}^2$. Тогда пара идеалов, близкая к (J, J'), может быть задана образующими $(\xi^n + f_1(\xi), z + g_1(\xi))$ и $(\xi^{n+i} + f_2(\xi), z + g_2(\xi))$, где f_1, g_1 — многочлены степени не выше n, а f_1, g_1 — не выше $n+i$. Коэффициенты многочленов f_1, g_1, f_2, g_2 задают координаты в окрестности точки (J, J') на пространстве $(\mathbb{C}^2)^{[n]} \times (\mathbb{C}^2)^{[n]}$; выберем эти координаты так: $f_1(\xi) = a_1 \xi^{n-1} + \dots + a_n$, $f_2(\xi) = b_1 \xi^{n+i-1} + \dots + b_{n+i}$, $g_1(\xi) = c_1 \xi^{n-1} + \dots + c_n$, $g_2(\xi) = d_{n+i} + \dots + d_{i+1}\xi^{n-1} + (d_i + \dots + d_1 \xi^{n-i})(\xi^n + f_1(\xi))$. Очевидно, $(J, J') \in A_i$ тогда и только тогда, когда $f_2(\xi) = \xi^i f_1(\xi)$, а $g_2(\xi) - g_1(\xi)$ делится на $\xi^n + f_1(\xi)$. Это эквивалентно системе уравнений $b_1 = a_1, \dots, b_n = a_n$, $b_{n+1} = \dots = b_{n+i} = 0$ и $c_1 = d_{i+1}, \dots, c_n = d_{n+i}$. С другой стороны, $(J, J') \in B$ тогда и только тогда, когда $f_1 = 0$, то есть $a_1 = \dots = a_n = 0$. Очевидно, две эти системы уравнений определяют подпространства, пересекающиеся трансверсально (в одну из систем входят только переменны $a_1, \dots, a_n$, а в другой они являются свободными параметрами). $\square$

Для всякого числа n класс $\mathcal{P}_{S,n} = P_{S,n} 1$ принадлежит $H_{2n}(X^{[n]})$ (здесь 1 — образующая группы $H_0(X^{[0]})$). Нетрудно видеть, что на самом деле этот класс реализован подмногообразием, состоящим из идеалов с носителем в кривой S, поэтому $\mathcal{P}_{S,n}$ можно рассматривать как элемент $H_{2n}(L_nS)$. Из предложения 2 и формул для производящих функций основных симметрических многочленов вытекает

Следствие. *При описанном выше изоморфизме колец Λ_S и Λ класс $\mathcal{P}_{S,n}$ переходит в p_n (сумму степеней). Мономы от классов $\mathcal{P}_{S,n}$ образуют базис в кольце Λ_S. Имеют место равенства $\sum_n \sum_{\nu \vdash n} z^n L^\nu S = \exp\left(\sum_{i=1}^\infty z^i \frac{\mathcal{P}_{S,i}}{i}\right)$ и $\sum_n z^n S^{(n)} = \exp\left((-1)^{i-1} \sum_{i=1}^\infty z^i \frac{\mathcal{P}_{S,i}}{i}\right)$.*

В последней формуле имеется в виду $S^{(n)} = L^{(1,\dots,1)}S$.