ЛЕКЦИЯ 11

Краткое содержание. Представление алгебры Гейзенберга в пространстве полубесконечных форм.

Назовем множество $\mathfrak{M} \subset \mathbb{Z}$ *дираковским*, если множества $\mathfrak{M}_e = \mathfrak{M} \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $\mathfrak{M}_p = \mathbb{Z}_{<0} \setminus \mathfrak{M}$ конечны. Множества $\mathfrak{M}_e$ и $\mathfrak{M}_p$ будем называть, соответственно, *электронной* и *позитронной* компонентой множества $\mathfrak{M}$. Величину $C(\mathfrak{M}) \stackrel{\text{def}}{=} \#(\mathfrak{M}_e) - \#(\mathfrak{M}_p)$ назовем *зарядом*, а величину $U(\mathfrak{M}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{a \in \mathfrak{M}_e \cup \mathfrak{M}_p} |a|$ — *энергией* множества $\mathfrak{M}$. *Пространством полубесконечных форм* назовем линейное пространство Λ, базис которого составляют выражения $\psi_{\mathfrak{M}} = \dots \wedge f_{i_n} \wedge f_{i_{n-1}} \wedge \dots \wedge f_{i_1}$, в которых $i_1 > i_2 > \dots$ и набор индексов $\mathfrak{M} = \{i_k\}$ — дираковское множество. Мы будем говорить об энергии и заряде базисного вектора $\dots \wedge f_{i_n} \wedge f_{i_{n-1}} \wedge \dots \wedge f_{i_1}$, имея в виду энергию и заряд соответствующего множества индексов.

Обозначим $\Lambda_{n,s}$ — множество векторов заряда n и энергии s.

Предложение 1.

$$F(t,q) = \sum_{n,s} \dim \Lambda_{n,s} t^n q^s = \sum_{\substack{\text{по всем дираковским} \\ \text{множествам } \mathfrak{M} = \{i_k\}}} t^{C(\mathfrak{M})} q^{U(\mathfrak{M})} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n q^{n(n-1)/2}}{\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)}.$$

Доказательство. Рассмотрим величину $F_N(t,q) = \sum t^{C(\mathfrak{M})} q^{U(\mathfrak{M})}$, где сумма берется по всем дираковским множествам $\mathfrak{M}$, содержащим все числа, не превосходящие $-N$. Тогда, очевидно,

$$F_N(t,q) = \frac{q^{(N-1)(N-2)/2}}{t^{N-1}} \prod_{m=0}^{\infty} (1 + tq^{m-N+1}) = \sum_{k=-N+1}^{\infty} t^k \frac{q^{k(k-1)/2}}{(1-q)\dots(1-q^{k+N-1})},$$

и $F(t,q) = \lim_{N\to\infty} F_N(t,q)$. □

Определим на пространстве Λ несколько операторов. Оператор, который действует на базисный вектор $\psi_{\mathfrak{M}} = \dots \wedge f_{i_n} \wedge f_{i_{n-1}} \wedge \dots \wedge f_{i_1}$ умножением справа на f_i, мы обозначим просто f_i. После действия получается "бесконечное косое произведение", в котором, однако, индексы при f не обязательно идут в порядке возрастания — последний индекс (i) может не быть наибольшим и может встречаться дважды. В этом случае нужно как бы считать, что $\wedge$ действительно является кососимметрическим умножением — переставить f_i на подобающее место, соответственно изменив знак (а если f_i уже встречался в $\psi_{\mathfrak{M}}$, то положить результат равным нулю). Действие оператора f^*_{-i} на базисный вектор $\psi_{\mathfrak{M}}$ определим как "дифференцирование по f_i" (обратите внимание на индексы!): если f_i не входит в $\psi_{\mathfrak{M}}$, то результат равен нулю, а если входит, то его следует перенести на последнее место (соответственно изменив знак) и вычеркнуть.

Рассмотрим пространство $V = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ многочленов Лорана. Обозначим $\mathcal{D}(V)$ пространство, равное $V \oplus V^*$, с билинейной формой, ограничение которой на $V \subset \mathcal{D}(V)$ и $V^* \subset \mathcal{D}(V)$ равно нулю, и по определению $(w, \alpha) = \langle \alpha, w \rangle$ для произвольных $w \in V$, $\alpha \in V^*$. Иными словами, если $w_i = t^i$, $i \in \mathbb{Z}$ — базис в V, а w_i^* — двойственный базис в V^* (с противоположной нумерацией), то $(w_i, w_j^*) = \delta_{i+j}$.

Предложение 2. *Отображение, сопоставляющее вектору w_i оператор f_i, а вектору w_i^* оператор f_i^*, является неприводимым представлением алгебры Клиффорда $\mathrm{Cl}(\mathcal{D}(V))$ в пространстве Λ.*

Доказательство. Несложно проверяются коммутационные соотношения $f_i f_j + f_j f_i = 0$, $f_i^* f_j^* + f_j^* f_i^* = 0$ и $f_i f^* j + f_j^* f_i = \delta_{i+j}$ — тем самым, мы действительно получили представление алгебры Клиффорда. Неприводимость следует из того, что что каждый вектор стандартного базиса может быть получен применением операторов f_i, f_i^* к *вакуумному вектору* $v = \dots \wedge f_{-2} \wedge f_{-1}$ и, в свою очередь, вакуумный вектор можно получить, применяя эти операторы к произвольному элементу Λ. □

Определим теперь операторы E_k, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, равенствами

$$E_k = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} f_\alpha f^*_{k-\alpha} = -\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} f^*_\alpha f_{k-\alpha},$$

а оператор E_0 — равенством

$$E_0 = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} {:}f_\alpha f^*_{-\alpha}{:} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha=-\infty}^{-1} f_\alpha f^*_{-\alpha} - \sum_{\alpha=0}^{\infty} f^*_{-\alpha} f_\alpha.$$

Предложение 3. *Оператор E_k сохраняет заряд и увеличивает энергию на k. Имеют место коммутационные соотношения $[E_k, f_l] = f_{k+l}$, $[E_k, f_l^*] = -f_{k+l}^*$.*

Доказательство — прямая проверка.

Рассмотрим теперь пространство $W = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ многочленов Лорана; определим на нем кососимметрическую билинейную форму равенством $(t^i, t^j) = i\delta_{i+j}$. Эта форма вырождена (ядро ее одномерно — состоит из констант). Также обозначим $W_0 \subset W$ множество многочленов Лорана без свободного члена; ограничение формы на W_0 невырождено.

Теорема 1. *Операторы E_k образуют в пространстве Λ представление алгебры Гейзенберга $\mathrm{Cl}(W)$. Это представление приводимо; неприводимые компоненты его — множества Λ_n векторов с фиксированным зарядом n. Как представление группы $\mathrm{Cl}(W_0)$ пространство Λ_n изоморфно представлению Фока со старшим вектором $v_n = \cdots \wedge f_{n-2} \wedge f_{n-1}$; оператор E_0 в этом представлении действует умножением на n.*

Доказательство. Проверим вначале, что операторы E_k действительно образуют представление алгебры Гейзенберга. Действительно, если $k+l \neq 0$ и $k, l \neq 0$, то согласно предложению 3, $[E_k, E_l] = \sum_\alpha [E_k, f_\alpha f_{l-\alpha}^*] = \sum_\alpha ([E_k, f_\alpha] f_{l-\alpha}^* + f_\alpha [E_k, f_{l-\alpha}^*]) = \sum_\alpha (f_{k+\alpha} f_{l-\alpha}^* - f_\alpha f_{k+l-\alpha}^*) = E_{k+l} - E_{k+l} = 0$. В случае $k+l = 0$, $k \neq 0$, имеем $[E_k, E_{-k}] = \sum_{\alpha \geq 0} [E_k, f_\alpha f_{-k-\alpha}^*] - \sum_{\alpha < 0} [E_k, f_{-k-\alpha}^* f_\alpha] = \sum_{\alpha \geq 0} f_{k+\alpha} f_{-k-\alpha}^* - \sum_{\alpha \geq 0} f_\alpha f_{-\alpha}^* - \sum_{\alpha < 0} f_{-k-\alpha}^* f_{k+\alpha} + \sum_{\alpha < 0} f_{-\alpha}^* f_\alpha = \sum_{\alpha=0}^{k-1} (f_\alpha f_{-\alpha}^* + f_{-\alpha}^* f_\alpha) = k$ — согласно предложению 2. В случае $k = 0$ вычисления аналогичны.

Покажем теперь, что Λ_n — представление Фока. Равенство $E_k v_n = 0$ при всяком $n \in \mathbb{Z}$ и $k > 0$ вытекает непосредственно из определения. Нам нужно доказать, что всякий вектор $w \in \Lambda_n$ однозначно представим в виде $Q(E_1, E_2, \ldots)v$ для некоторого многочлена Q.

Докажем сначала единственность. Действительно, пусть $Q(E_1, E_2, \ldots)v = 0$; без ограничения общности многочлен Q однороден. Из доказанного выше вытекает, что для всякого $k > 0$ верна формула $E_{-k} Q(E_1, E_2, \ldots)v = [E_{-k}, Q(E_1, E_2, \ldots)]v = -k \frac{\partial Q}{\partial E_k} v$. Индукцией по степени многочлена Q заключаем, что все частные производные его равны нулю — следовательно, $Q = 0$ в силу однородности.

Существование многочлена Q выведем из соображений размерности. Пусть P_d — пространство многочленов от переменных $E_1, E_2, \ldots$ взвешенной степени d, где вес переменной E_i равен i (иными словами, согласно предложению 3, при $Q \in P_d$ оператор $Q(E_1, E_2, \ldots)$ сохраняет заряд и увеличивает энергию на d). Моному $E_1^{a_1} E_2^{a_2} \cdots \in P_d$ соответствует разбиение $(1^{a_1} 2^{a_2} \ldots)$ числа $d = a_1 + 2a_2 + \ldots$, откуда вытекает, что размерность $\dim P_d$ равна $p(d)$ — количеству разбиений числа d. Следовательно, $\sum_d \dim P_d = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\ldots}$. С другой стороны, из предложения 1 вытекает, что $\sum_s \dim \Lambda_{n,s} q^s = q^{n(n-1)/2} \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\ldots}$, то есть $\dim \Lambda_{n, n(n-1)/2+d} = \dim P_d$. Отсюда вытекает, что многочлен Q существует для всякого вектора $w \in \Lambda_n$.

Пусть теперь $U \subset \Lambda_n$ — подпредставление, и пусть $u \in U$ — вектор наименьшей степени. Согласно доказанному выше, $u = Q(E_1, E_2, \ldots)$, и $E_{-k} u = k \frac{\partial Q}{\partial E_k} v = 0$, откуда $Q = const.$ и, следовательно, $U = \Lambda_n$ или $U = 0$ — то есть, представление Λ_n неприводимо. Оператор E_0 коммутирует со всеми E_k и, следовательно, действует в этом представлении умножением на константу. Равенство $E_0 v_n = n v_n$ проверяется непосредственным вычислением. $\square$