ЛЕКЦИЯ 12

Краткое содержание. Бозон-фермионное соответствие.

Рассмотрим теперь f_i как оператор $\Lambda_0 \to \Lambda_1$. Нетрудно видеть, что набор операторов f_s, $s \in \mathbb{Z}$, обладает такими свойствами:

(1) Оператор f_s увеличивает энергию на s.
(2) Выполнены коммутационные соотношения $[E_k, f_s] = f_{s+k}$.
(3) $f_0 v_0 = v_1$.

Для удобства дальнейших рассуждений введем формальную переменную z и рассмотрим *вертексный оператор*, определенный равенством $f(z) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} f_s z^{-s}$. Коммутационное соотношение 2 теперь принимают вид

(2′) $[E_k, f(z)] = z^k f(z)$.

Предложение 1. *Вертексный оператор $f(z)$ однозначно определяется свойствами 1, 2′ и 3.*

Доказательство. Покажем сначала, что действие операторов f_s на вакуумный вектор v_0 определено однозначно. Для оператора f_0 это так по свойству 3. Кроме того, $f_s v_0 = 0$ при $s < 0$ в силу свойства 1. Пусть векторы $f_s v$ известны при $s < k$. Тогда в силу свойства 2 имеем при $i > 0$: $E_{-i} f_k v_0 = f_k E_{-i} v_0 + f_{k-i} v_0 = f_{k-i} v_0$ т.е. действие E_{-i} на $f_k v_0$ определено однозначно. Поскольку Λ_1 — представление Фока, вектор $f_k v_0$ равен $P_k(E_1, E_2, \dots) v_1$ для некоторого многочлена P_k. Из коммутационных соотношений следует, что $E_{-i} P_k(E_1, E_2, \dots) v_1 = -i \frac{\partial P_k}{\partial E_i} v_1$ — следовательно, мы можем однозначно определить все частные производные многочлена P_k. Таким образом, этот многочлен известен нам с точностью до константы. Но, согласно свойству 1, P_k должен быть однородным, и поэтому неоднозначность отсутствует вовсе.

Тем самым, мы знаем вектор $f_k v_0$ для всех k. Теперь действие f_k на все остальные векторы однозначно определяется из коммутационных соотношений. Действительно, пусть $w = E_{i_1} \dots E_{i_s} v_0$, и пусть для всех $l < s$ и всех k действие f_k на векторы вида $E_{i_1} \dots E_{i_l} v_0$ известно. Тогда вектор $f_k w = E_{i_1}(f_k E_{i_2} \dots E_{i_s} v_0) + f_{k+i_1} E_{i_2} \dots E_{i_s} v_0$ также определен однозначно. □

Пространства Λ_0 и Λ_1 изоморфны как представления алгебры $\mathrm{Cl}(W_0)$ (порожденной E_k при $k \neq 0$), то есть различаются только действием оператора E_0. Обозначим $D : \Lambda_0 \to \Lambda_1$ их изоморфизм, т.е. оператор, переводящий v_0 в v_1 и коммутирующий со всеми E_k, $k \neq 0$. Нетрудно видеть, что это оператор “сдвига начала отсчета энергии”: $D(\dots \wedge f_{i_n} \wedge f_{i_{n-1}} \wedge \dots \wedge f_{i_1}) = \dots \wedge f_{i_n+1} \wedge f_{i_{n-1}+1} \wedge \dots \wedge f_{i_1+1}$.

Теорема 1 (бозон-фермионное соответствие).

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}} f_s z^{-s} = \exp\left(-\sum_{n<0} \frac{E_n}{n} z^{-n}\right) D \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{E_n}{n} z^{-n}\right),$$

Доказательство. Согласно предложению 1, достаточно показать, что правая часть равенства обладает свойствами вертексного оператора. Свойства 1 и 3, очевидно, выполнены. Для доказательства свойства 2′ обозначим первую экспоненту $E_-(z)$, а вторую $E_+(z)$. Из коммутационных соотношений между E_k следует, что $[E_k, E_-(z)] = 0$, $[E_k, E_+(z)] = z^k E_+(z)$ при $k < 0$, $[E_k, E_-(z)] = z^k E_-(z)$, $[E_k, E_+(z)] = 0$ при $k > 0$, и $[E_0, E_+(z)] = [E_0, E_-(z)] = 0$. Для оператора D имеем $[E_k, D] = 0$ при $i \neq 0$, и $[E_0, D] = D$. Обозначая правую часть равенства $\widetilde{f}(z)$, получим, что $[E_k, \widetilde{f}(z)] = z^k \widetilde{f}(z)$ для всякого $k \in \mathbb{Z}$. □

Аналогичным образом выводится формула

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}} f_s^* z^{-s} = \exp\left(\sum_{n<0} \frac{E_n}{n} z^{-n}\right) D^{-1} \exp\left(\sum_{n>0} \frac{E_n}{n} z^{-n}\right),$$

где f_s^* — оператор уничтожения $\Lambda_1 \to \Lambda_0$. Так же выглядит и формула для вертексного оператора $\Lambda_N \to \Lambda_{N+1}$ для произвольного N, только под D следует понимать изоморфизм $\Lambda_N \to \Lambda_{N+1}$, и всю правую часть нужно умножить на z^N.

Пусть X — компактная комплексная поверхность, а $S \subset X$ — комплексная кривая; обозначим $L^n S = \mathcal{HC}^{-1}(S^{(n)})$, где $\mathcal{HC}$ — отображение Чжоу, а $S^{(n)}$ рассматривается как подмножество $X^{(n)}$. Как было показано в лекции 10, в пространстве $\mathcal{H} = \bigoplus_n H_{2n}(L^n S)$ возникает представление Фока, в котором $E_k = P_{S,k}$ (оператор Накаджимы, см. определение в лекции 8). Рассмотрим сумму бесконечного количества копий $\mathcal{H}_N$

пространства $\mathcal{H}$, занумерованных целыми числами, и отождествим $\mathcal{H}_N$ с Λ_N. Оператор E_0 определим искусственным соглашением $E_0|_{\mathcal{H}_N} = N\,\mathrm{Id}$. Тогда $\bigoplus_N \mathcal{H}_N$ отождествится с пространством полубесконечных форм, и в нем можно определить операторы f_s и f_s^* для всех $s \in \mathbb{Z}$.

Задача. Выясните их геометрический смысл.

Теорема 1 позволяет, в принципе, вычислить действие операторов f_s на произвольном векторе.

Пример 1. Докажем, что оператор $f_k f_k^*$ действует на вакуумный вектор v_0 нулем при $k < 0$ и единицей при $k \geq 0$. Поскольку оператор $f_k f_k^*$ сохраняет заряд и энергию (это следует из свойства 1 вертексных операторов), а представление Λ_0 неприводимо, он действует на v_0 константой μ_k. Производящая функция $\mu(t) = \sum_k \mu_k t^k$ равна свободному члену (зависящему от t) при разложении по степеням z выражения $A(z,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} v_0 f(z/t) f_*(z) = v_0 \exp\left(-\sum_{n<0} \frac{E_n}{n} t^n z^{-k}\right) D \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{E_n}{n} t^n z^{-n}\right) \exp\left(\sum_{n<0} \frac{E_n}{n} z^{-n}\right) D^{-1} \exp\left(\sum_{n>0} \frac{E_n}{n} z^{-n}\right)$. Поскольку операторы E_n при $n < 0$ действуют на вектор v_0 нулем, имеем

$$\frac{\partial A(z,t)}{\partial t} = -v_0 \exp\left(-\sum_{n<0} \frac{E_n}{n} t^n z^{-n}\right) D \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{E_n}{n} t^n z^{-n}\right) \times \\ \times \left(\sum_{l>0} E_l t^{l-1} z^l\right) \exp\left(\sum_{n<0} \frac{E_n}{n} z^{-n}\right) D^{-1} \exp\left(\sum_{n>0} \frac{E_n}{n} z^{-n}\right).$$

Если поменять местами два сомножителя в начале второй строки, то получится выражение, содержащее только векторы с положительной энергией, которые для нас не представляют интереса. Поэтому свободный член в $\frac{\partial A(z,t)}{\partial t}$ такой же, как в выражении

$$- v_0 \exp\left(-\sum_{n<0} \frac{E_n}{n} t^n z^{-n}\right) D \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{E_n}{n} t^n z^{-n}\right) \times \\ \times \sum_{l>0} t^{l-1} z^l \left[E_l, \exp\left(\sum_{n<0} \frac{E_n}{n} z^{-n}\right)\right] D^{-1} \exp\left(\sum_{k>0} \frac{E_k}{k} z^k\right) = \\ = v_0 \exp\left(-\sum_{n<0} \frac{E_n}{n} t^n z^{-n}\right) D \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{E_n}{n} t^n z^{-n}\right) \times \\ \times \left(\sum_{l>0} t^{l-1}\right) \exp\left(\sum_{n<0} \frac{E_n}{n} z^{-n}\right) D^{-1} \exp\left(\sum_{n>0} \frac{E_n}{n} z^{-n}\right) = \\ = A(t,z)/(1-t),$$

откуда $\mu'(t) = \frac{\mu(t)}{1-t}$, то есть $\mu(t) = \frac{1}{1-t}$, что и требовалось.

Выведем теперь соотношения антикоммутирования между операторами f_s и f_s^* из теоремы 1. Для этого рассмотрим операторы $g_{kl} : \Lambda_0 \to \Lambda_0$ с такими свойствами

(1) Оператор g_{kl} повышает энергию на $k + l$.

(2) Имеют место коммутационные соотношения $[E_s, g_{kl}] = g_{k+s,l} - g_{k,l+s}$.

Примером (не единственным !) такой системы являются операторы $g_{kl} = f_k f_l^*$. Из свойства 1 следует, что $g_{k,-k} v_0 = \mu_k v_0$ для некоторой константы μ_k.

Предложение 2. *Для любой последовательности чисел μ_k, $k \in \mathbb{Z}$ существует и единственна система операторов g_{kl}, обладающих свойствами 1 и 2 и удовлетворяющая равенствам $g_{k,-k} v_0 = \mu_k v_0$.*

Идея доказательства. Доказательство единственности практически не отличается от доказательства единственности в теореме 1 (проделайте !). Для доказательства существования нужно задать операторы g_{kl} явной формулой:

$$\sum_{k,l} g_{kl} z_1^{-k} z_2^{-l} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \exp\left(-\sum_{n<0} \frac{E_n}{n} (z_1^{-n} - z_2^{-n})\right) \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \mu_j z_1^{-j} z_2^j\right) \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{E_n}{n} (z_1^{-n} + \beta z_2^{-n})\right),$$

Проверка свойств 1 и 2 — несложное вычисление. Равенство $g_{k,-k} v_0 = \mu_k v_0$ очевидно. $\square$

Зададим теперь операторы g_{kl} равенствами $g_{kl} = f_k f_l^* - f_{k-1} f_{l+1}^*$. Из свойств вертексных операторов вытекает, что свойства 1 и 2 выполнены. Значения констант μ_k нетрудно получить из примера 1: $\mu_0 = 1$ и $\mu_k = 0$ при прочих k. Рассмотрим теперь операторы $g'_{kl} \stackrel{\mathrm{def}}{=} f_{l+1}^* f_{k-1} - f_l^* f_k$. Они также обладают свойствами 1 и 2, и константы μ_k для них такие же (проверьте !). Тогда из предложения 2 вытекает равенство $g_{kl} = g'_{kl}$, эквивалентное утверждению $\{f_k, f_l^*\} = \{f_{k-1}, f_{l+1}^*\}$. Иными словами, оператор $\{f_k, f_l^*\}$ зависит только от суммы $k+l$; обозначим его u_{k+l}.

В силу свойства 2 вертексных операторов имеем: $[E_r, u_s] = u_{r+s} - u_{r+s} = 0$, откуда вытекает, что u_s — оператор умножения на константу. Из свойства 1 вертексных операторов вытекает, что оператор u_s увеличивает энергию на s, откуда сразу следует, что при $s \neq 0$ оператор u_s — нулевой. При $s = 0$ из примера 1 следует, что $u_0 = 1$. Тем самым мы вывели из теоремы 1 равенства $\{f_k, f_l^*\} = \delta_{k+l}$. Равенства $\{f_k, f_l\} = \{f_k^*, f_l^*\} = 0$ выводятся похожим образом.