ЛЕКЦИЯ 2

Краткое содержание. Определение локальной алгебры. Описана локальная алгебра отображений факторизации $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{(n)}$ и $(\mathbb{C}^2)^n \to (\mathbb{C}^2)^{(n)}$.

Как мы уже отмечали в предыдущей лекции, на симметрическую степень $X^{(n)}$ можно перенести практически любую дополнительную структуру, которой наделено пространство X. В частности, если X — алгебраическое многообразие (т.е. на нем определено понятие алгебраической функции — задан пучок алгебр $\mathrm{Alg}(X)$), то алгебраическим многообразием является и его декартова степень X^n, а также симметрическая степень $X^{(n)}$: алгебраическая функция на X^n это сумма вида $\sum a_i f_{i_1}(x_1)\dots f_{i_n}(x_n)$, где f_{i_k} — алгебраические функции на X, а a_i — числа. Алгебраическая функция на $X^{(n)}$ это, по определению, алгебраическая функция на X^n, инвариантная относительно действия симметрической группы, т.е. перестановки аргументов.

Теперь мы видим, что определенное в предыдущей лекции отображение $e : \mathbb{C}^{(n)} \to \mathbb{C}^n$ определяет эквивалентность не только комплексных, но и алгебраических многообразий, то есть, отображение $e^* : \mathrm{Alg}(\mathbb{C}^{(n)}) \to \mathrm{Alg}(\mathbb{C}^n)$ колец алгебраических функций на этих многообразиях является взаимно однозначным. Действительно, алгебраические функции на $\mathbb{C}$ это многочлены, а алгебраические функции на $\mathbb{C}^{(n)} = \mathbb{C}^n/\Sigma_n$ это, по определению, симметрические многочлены от переменных $z_1, \dots, z_n$. Согласно “основной лемме о симметрических многочленах” всякий такой многочлен однозначно представляется в виде $P(e_1(z), \dots, e_n(z))$, где P — некоторый многочлен, а $e_1, \dots, e_n$ — элементарные симметрические многочлены, то есть в виде e^*P.

Будем говорить, что задан *росток* голоморфного отображения $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ в начале координат, если для каждой достаточно малой окрестности $U \ni 0$ задано голоморфное отображение F_U, причем для любых U и V отображения F_U и F_V совпадают в некоторой окрестности $W \subset U \cap V$, $0 \in W$. (Разумеется, можно рассматривать ростки не только голоморфных отображений, но и отображений других классов — скажем, гладких или вещественно аналитических, а также ростки более общих объектов, не являющихся отображениями; но нам в этой лекции это не понадобится.) Для ростков определена композиция; нетрудно также видеть, что ростки можно складывать, а ростки функций (т.е. если $m = 1$) также и умножать.

Предположим, что $F^{-1}(0) = \{0\}$, и пусть $\mathcal{A}$ — алгебра ростков голоморфных функций на $\mathbb{C}^n$ в окрестности начала координат. Тогда отображение $F^* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ определено формулой $F^*g = g \circ F$. Пусть $\mathcal{A}_0$ — множество функций из $\mathcal{A}$, обращающихся в нуль в начале координат; обозначим J_F идеал, натянутый на $F^*\mathcal{A}_0$. Фактор $\mathcal{A}/J_F$ называется локальной алгеброй ростка F и обозначается $\mathcal{A}_F$.

В силу локального характера определения можно заменить $\mathbb{C}^n$ в образе и прообразе двумя гладкими комплексными многообразиями X, Y одинаковой размерности.

Если отображение $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ полиномиально, то вместо алгебры $\mathcal{A}$ можно использовать алгебру многочленов $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$; позднее мы покажем, что на локальную алгебру это не влияет. Если при этом многочлены, задающие компоненты отображения F, однородны, то на локальной алгебре $\mathcal{A}_F$ возникает градуировка.

Пример 1. Пусть $n = 1$ и $F(z) = z^k$. Тогда $\mathcal{A}_F = \mathbb{C}[z]/(z^k)$ — алгебра размерности k.

Приведенный пример есть появление следующей общей теоремы.

Теорема 1. *Пусть для точки общего положения $a \in \mathbb{C}^n$ прообраз $F^{-1}(a)$ состоит из k точек. Тогда алгебра $\mathcal{A}_F$ имеет размерность k.*

Рассмотрим еще один пример: пусть $X = \mathbb{C}^n$, $Y = \mathbb{C}^{(n)} (= \mathbb{C}^n)$, и $F : X \to Y$ — отображение факторизации. Положим $\mathcal{A} = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$; тогда $F^*\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ состоит из всех симметрических многочленов положительной степени. Согласно теореме 1, размерность локальной алгебры $\mathcal{A}_F$ равна $n!$. На самом деле можно доказать это явно, и даже уточнить:

Предложение 1. *Мономы $\xi_k \stackrel{def}{=} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$, где $0 \le k_s \le s - 1$ для всех $s = 1, \dots, n$, образуют базис в алгебре $\mathcal{A}_F$.*

Доказательство. Докажем сначала, что мономы ξ_k образуют полную систему.

Лемма 1. *Для всех i, j, $0 \le i \le j$ существует однородный многочлен $P_j^{(i)}$ степени i от j переменных, такой что для всяких n, k, $1 \le k \le n$, выполнено соотношение*

$$\sum_{i=0}^{k} P_{n+1-k}^{(i)}(x_k, \dots, x_n) e_{k-i}(x_1, \dots, x_n) = 0 \tag{1}$$

Доказательство леммы. Положим по определению $P_j^{(0)} = 1$; тогда соотношение (1) при $k = 1$ определяет однозначно многочлены $P_n^{(1)}$ (а именно, $P_n^{(1)}(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$). Теперь, когда $P_n^{(1)}$ известны, соотношение (1) при $k = 2$ определяет однозначно многочлены $P_n^{(2)}$, и т.д. по индукции.

Нетрудно видеть, что многочлен $P_n^{(k)}$ однороден и имеет степень k. Единственное, что требует доказательства, это то, что многочлен зависит только от переменных $x_k, \dots, x_n$. Это делается индукцией по k: согласно соотношению (1), $\frac{\partial P_{n+1-k}^{(k)}}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} P_{n+1-k}^{(i)}(x_k, \dots, x_n) \frac{\partial e_{k-i}(x_1, \dots, x_{n-k})}{\partial x_1} = -\sum_{i=1}^{k} (-1)^i P_{n+1-k}^{(i)}(x_k, \dots, x_n) e_{i-1}(x_2, .$ 0 по предположению индукции (в последнем равенстве стоят элементарные симметрические многочлены от $n-1$ переменных). Тем самым, так что многочлен $P_s^{(k)}$ не зависит от x_1. По соображениям симметрии, он также не зависит от всех x_j, $1 \le j \le k-1$, а зависит только от переменных $x_k, \dots, x_n$. □

Частным случаем соотношения (1) ($k = n-1$) является равенство $x_n^n - x_n^{n-1} e_1(x_1, \dots, x_n) + \dots \pm e_n(x_1, \dots, x_n) = 0$. Из него вытекает, что в многочлене $u_k(x_1, \dots, x_n) \overset{\text{def}}{=} P_{n+1-k}^{(k)}(x_k, \dots, x_n)$ коэффициент при x_k^k равен 1; поскольку общая степень равна k, то остальные мономы u_k содержат переменную x_k в степенях, меньших k. Из соотношения (1) также следует, что многочлен $u_k(x)$ принадлежит идеалу, порожденному $e_1(x_1, \dots, x_n), \dots, e_n(x_1, \dots, x_n)$, то есть является соотношением в локальной алгебре $\mathcal{A}_F$. Применяя последовательно эти соотношения, мы можем свести любой элемент $\mathcal{A}_F$ к линейной комбинации допустимых мономов ξ_k.

Докажем теперь, что мономы ξ_k линейно независимы по модулю идеала.

Лемма 2. *Пусть $\sum_k \xi_k a_k(x) \equiv 0$, где суммирование производится по всем допустимым мономам), а многочлены $a_k(x)$ — симметрические. Тогда $a_k(x) \equiv 0$ для всех k.*

Доказательство леммы. Докажем (индукцией по $m = 0, \dots, n$), что для всякого m и произвольных постоянных $\beta_0, \dots, \beta_m$ таких, что $0 \le \beta_s \le s-1$, $s = 0, \dots, m$, имеет место равенство $\sum_{k : k_1 = \beta_1, \dots, k_m = \beta_m} x_{m+1}^{k_{m+1}} \dots x_n^{k_n} a_k(x) \equiv 0$. База индукции ($m = 0$) это условие леммы, а утверждение при $m = n$ это то, что нужно доказать.

Шаг индукции: пусть $\sum_{k : k_1 = \beta_1, \dots, k_m = \beta_m} x_{m+1}^{k_{m+1}} \dots x_n^{k_n} a_k(x) \equiv 0$. Иными словами, $\sum_{\beta_{m+1}=0}^{m} x_{m+1}^{\beta_{m+1}} \sum_{k : k_1 = \beta_1, \dots, k_{m+1} = \beta_{m+1}} x_{m+2}^{k_{m+2}} \dots x_n^{k_n} a_k(x) = 0$. Переставляя переменные $x_{m+1} \leftrightarrow x_s$, получим для всех $s = 1, 2, \dots, m+1$ равенство $\sum_{\beta_{m+1}=0}^{m} x_s^{\beta_{m+1}} \sum_{k : k_1 = \beta_1, \dots, k_{m+1} = \beta_{m+1}} x_{m+2}^{k_{m+2}} \dots x_n^{k_n} a_k(x) \equiv 0$. Поскольку определитель Вандермонда не есть тождественный нуль, получим $\sum_{k : k_1 = \beta_1, \dots, k_m = \beta_{m+1}} x_{m+2}^{k_{m+2}} \dots x_n^{k_n} a_k(x) \equiv 0$. □

Пусть теперь $A = \sum_k u_k \xi_k \in J_F$, где суммирование производится по всем допустимым мономам ξ_k. Применяя предыдущую конструкцию к многочлену A, представим его в виде $A = \sum_{m=1}^{n} \sum_{i_1, \dots, i_m = 1}^{n} u_{i_1, \dots, i_m, k} \sum_k \xi_k e_{i_1} \dots e_{i_m}$, откуда $\sum_k \xi_k (u_k - \sum_{m=1}^{n} \sum_{i_1, \dots, i_m = 1}^{n} u_{i_1, \dots, i_m, k} e_{i_1} \dots e_{i_m}) = 0$. По лемме 2 все коэффициенты при ξ_k равны нулю. Поскольку все e_i — многочлены положительной степени, получаем равенство $u_k = 0$ для всех k. □

Упражнение 1. Покажите, что построенные многочлены u_k представляют собой базис Гребнера идеала J_F по отношению к некоторому порядку на множестве мономов; какому именно ?

Замечание. Предложение 1 является частным случаем следующей теоремы Шевалле: пусть в $\mathbb{C}^n$ действует конечная группа, порожденная комплексными отражениями (в нашем случае это группа перестановок Σ_n, порожденная транспозициями координат $\sigma_i : z_i \leftrightarrow z_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$). Тогда пространство орбит этой группы изоморфно $\mathbb{C}^n$ как комплексное (и алгебраическое) многообразие, а базис в локальной алгебре составляют мономы вида $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$, $0 \le k_i \le m_i - 1$, где $m_1, \dots, m_n$ — числа, зависящие от группы и называемые ее показателями.

Локальная алгебра $\mathcal{A}_F$ имеет еще одну реализацию — топологическую. Пусть X — топологическое пространство, а $\mathcal{L}$ — комплексное векторное расслоение над X ранга n. Из топологии известно, что в такой ситуации можно определить *классы Чженя* $c_i(\mathcal{L})$, $i = 1, \dots, n$. Класс Чженя $c_i(\mathcal{L})$ является элементом группы когомологий $H^{2i}(X)$ (с целыми коэффициентами), и обладает следующими свойствами:

(1) Если $\mathcal{L}$ — тривиальное расслоение, то $c_i(\mathcal{L}) = 0$ при всех i.
(2) Имеет место равенство $\mathrm{ch}(\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_1) = c(\mathcal{L}_1) c(\mathcal{L}_2)$, где $c(\mathcal{L})$ — элемент (неоднородный) кольца когомологий базы X, заданный равенством $c(\mathcal{L}) = 1 + c_1(\mathcal{L}) + \dots + c_n(\mathcal{L})$ (он называется полным классом Чженя расслоения $\mathcal{L}$).

Пусть теперь $X = \mathrm{Fl}(n)$ — многообразие полных флагов в $\mathbb{C}^n$. Иными словами, элементами X являются цепочки вложенных подпространств $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = \mathbb{C}^n$, где $\dim V_k = k$.

На многообразии флагов имеется n линейных расслоений κ_i, $i = 1, \dots, n$. Слоем расслоения κ_1 над точкой $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n$ является пространство V_1, слоем расслоения κ_2 — факторпространство V_2/V_1, и т.д. Тем самым в группе $H^2(\mathrm{Fl}(n))$ имеется n элементов $x_1, \dots, x_n$, где $x_i = c_1(\kappa_i)$. Можно показать, что элементы $x_1, \dots, x_n$ порождают алгебру когомологий $H^*(\mathrm{Fl}(n))$.

Лемма. *Прямая сумма расслоений $\kappa_1 \oplus \dots \oplus \kappa_n$ тривиальна.*

Доказательство — упражнение.

Из леммы и упомянутых выше свойств классов Чженя вытекает, что в алгебре $H^*(\mathrm{Fl}(n))$ имеет место равенство $(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) = 1$. Иными словами, $e_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ для всех элементарных симметрических многочленов e_i положительной степени. Тем самым, алгебра $H^*(\mathrm{Fl}(n))$ является фактором локальной алгебры $\mathcal{A}_F$, рассмотренной выше.

На самом же деле эти две алгебры совпадают. Дело в том, что у многообразия $\mathrm{Fl}(n)$ имеется клеточное разбиение (разбиение Шуберта), состоящее из $n!$ клеток четной размерности (клетки Шуберта нумеруются перестановками $\sigma \in \Sigma_n$). Поскольку клетки соседних размерностей отсутствуют, клеточные дифференциалы равны нулю, и общая размерность алгебры когомологий $H^*(\mathrm{Fl}(n))$ равна $n!$, то есть размерности алгебры $\mathcal{A}_F$.

Задача 1. Докажите, что $H^*(\mathrm{Fl}(n))$ действительно порождена классами $x_1, \dots, x_n$. Выразите через $x_1, \dots, x_n$ классы когомологий, соответствующие клеткам Шуберта. Как обобщить этот результат на другие группы, порожденные отражениями ?

Рассмотрим теперь симметрическую степень $(\mathbb{C}^2)^{(n)}$. Она обладает структурой алгебраического многообразия, но это многообразие негладкое уже при $n = 2$.

Для доказательства Рассмотрим локальную алгебру $\mathcal{A}_f$ отображения факторизации $f : (\mathbb{C}^2)^2 \to (\mathbb{C}^2)^{(2)}$, то есть фактор алгебры многочленов от 4 переменных по идеалу, порожденному многочленами положительной степени, обладающими такой симметрией: $P(x_1, y_1, x_2, y_2) = P(x_2, y_2, x_1, y_1)$. Нетрудно видеть, что компонента степени 0 алгебры $\mathcal{A}_f$ одномерна, а компонента степени 1 имеет размерность 2. Следовательно, размерность алгебры не меньше 3 и не равна 2, то есть порядку группы Σ_2 — так что предположение о гладкости $(\mathbb{C}^2)^{(2)}$ противоречит теореме 1. Теорема Шевалле здесь неприменима, т.к. действие группы Σ_2 в $(\mathbb{C}^2)^2$ не порождено отражениями.

На самом деле размерность алгебры $\mathcal{A}_f$ равна 3: нетрудно видеть, что все многочлены от 4 переменных степени 2 и больше принадлежат идеалу. В общем случае разница между размерностью локальной алгебры $\mathcal{A}_f$ и степенью отображения f (количеством прообразов точки общего положения) представляет собой важную характеристику негладкости образа. Так, например, имеет место следующее утверждение

Теорема (М. Хайман, 2000 г). *Для отображения факторизации $f : (\mathbb{C}^2)^n \to (\mathbb{C}^2)^{(n)}$ при произвольном n имеет место равенство $\dim \mathcal{A}_f = (n+1)^{n-1}$ (в то время как $\#\Sigma_n = n!$).*

Алгебра A_f биградуирована: для элемента $P \in A$ можно определить общую степень по x и общую степень по y (в терминологии предыдущего примера). Многое известно про размерности биградуированных компонент A_{kl}. Так, М. Хайман показал, что

(1) $\dim A_{kl} \neq 0$ только при $k + l \le n(n-1)/2$; если $k + l = n(n-1)/2$, то $\dim A_{kl} = 1$.
(2) $\sum_{k-l=s} \dim A_{kl}$ равна коэффициенту при t^s в выражении $t^{-n(n-1)/2}(1 + t + \dots + t^n)^{n-1}$.
(3) $\sum_{l=s} \dim A_{kl}$ равно количеству деревьев с $(n+1)$ вершинами, занумерованными числами от 0 до n, имеющих ровно $n(n-1)/2 - k$ “инверсий”. Инверсией называется всякая пара вершин (i, j) дерева такая, что $i < j$, и путь, соединяющий вершину j с вершиной 0 и не проходящий ни по какому ребру дважды, проходит через вершину i.