ЛЕКЦИЯ 3

Краткое содержание. Подготовительная теорема Вейерштрасса. Локальная кратность голоморфного ростка равна его степени.

Пусть $F:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ — росток голоморфного отображения, для которого $F(0)=0$. Тогда для него можно определить, как это было сделано ранее, локальную алгебру $\mathcal{A}_F=Q/\langle F^*Q_0\rangle$, где Q — алгебра ростков голоморфных функций в начале координат, $Q_0\subset Q$ — ее подагебра, состоящая из функций с условием $f(0)=0$, а $F^*:Q\to Q$ — отображение композиции с F: $F^*f\stackrel{\text{def}}{=}f\circ F$.

Алгебру Q можно заменить на другую алгебру — лишь бы было определено отображение F^*. Возможны, например, такие варианты:

- Отображение F полиномиально (т.е. все его компоненты $F_1,\dots,F_n$ — многочлены), Q — алгебра многочленов. В этом случае нет необходимости переходить к росткам, а идеал $\langle F^*Q_0\rangle$ порожден многочленами $F_1,\dots,F_n$.
- $F\in(\mathbb{C}[[z_1,\dots,z_n]])^n$ — n-компонентный формальный ряд в начале координат, а $Q=\mathbb{C}[[z_1,\dots,z_n]]$ — алгебра формальных рядов.

Таким образом, если F — росток голоморфного отображения, то для него определены по крайней мере две локальные алгебры — обычная и формальная; мы будет обозначать их $\mathcal{A}_F$ и $\mathcal{A}_F^{\text{form}}$. Если F полиномиально, то к ним добавится еще и полиномиальная локальная алгебра $\mathcal{A}_F^{\text{pol}}$. Размерность алгебры $\mathcal{A}_F$ называется *кратностью* ростка F (в начале координат) и обозначается $\mu_0(F)$.

Рассмотрим сферу S_δ малого радиуса с центром в начале координат. При $x\in S_\delta$ имеем $F(x)\neq 0$, так что определено гауссово отображение $G_F=F/|F|:S_\delta\to S_1$. Его степень называется *индексом* начала координат при отображении F и обозначается $\operatorname{ind}_0(F)$. Очевидно, определение индекса корректно, т.е. не зависит от выбора сферы S_δ.

Теорема 1. *Пусть F — росток голоморфного отображения, имеющий изолированный нуль в начале координат и конечную кратность μ. Тогда $\operatorname{ind}_0(F)=\mu$.*

Замечание. На самом деле требование конечной кратности излишне — если нуль изолирован, то росток всегда имеет конечную кратность. Это утверждение (мы не будем его доказывать) есть разновидность теоремы Гильберта о нулях для ростков.

Для доказательства теоремы 1 мы будем шевелить росток F, приводя его в "общее положение". При этом нуль в начале координат, вообще говоря, распадется, и нам потребуется утверждение, связывающее локальные алгебры ростка в различных точках. Это утверждение известно в нескольких вариантах и называется подготовительной теоремой Вейерштрасса.

Предположим, что $e_1,\dots,e_\mu$ — базис в $\mathcal{A}_F^{\text{form}}$. Элементы e_i — образы при отображении факторизации некоторых формальных рядов, которые мы тоже будем обозначать $e_i\in\mathrm{Q}=\mathbb{C}[[z_1,\dots,z_n]]$.

Предложение 1 (подготовительная теорема Вейерштрасса, формальный/полиномиальный случай). *Для всякого формального ряда $g\in\mathrm{Q}$ существуют формальные ряды $c_1,\dots,c_\mu$ такие, что $g(x)=\sum_{i=1}^{\mu}e_i(x)c_i(F(x))$. Если при этом F полиномиально и алгебра $\mathcal{A}_F^{\text{pol}}$ конечномерна, то она изоморфна $\mathcal{A}_F^{\text{form}}$.*

Доказательство. По определению базиса, имеется разложение $g(x)=\sum_{i=1}^{\mu}c_ie_i(x)+\sum_{j=1}^{n}g_j(x)F_j(x)$. В свою очередь, $g_j(x)=\sum_{i=1}^{\mu}c_{ji}e_i(x)+\sum_{k=1}^{n}e_{jk}(x)F_k(x)$, откуда $g(x)=\sum_{i=1}^{\mu}\bigl(c_i+\sum_{j=1}^{\mu}c_{ji}F_i(x)\bigr)e_i(x)+\sum_{j,k=1}^{n}g_{jk}(x)F_j(x)F_k(x)$. Продолжая процедуру переразложения, получим требуемый ряд.

Для доказательства второго утверждения предположим, что $e_1,\dots,e_\mu$ — базис в $\mathcal{A}_F^{\text{pol}}$, а g — произвольный формальный ряд. Тогда $g(x)=\lim_{k\to\infty}g_k(x)$, где g_k — многочлены, а сходимость понимается в смысле топологии пространства формальных рядов, т.е. покоэффициентно. Без ограничения общности можно считать, что коэффициенты многочленов g_k при каждом фиксированном мономе с ростом k стабилизируются. Согласно первому утверждению теоремы, $g_k(x)=\sum_{i=1}^{\mu}c_i^{(k)}(F(x))e_i(x)$, где $c_i^{(k)}$ — некоторые формальные ряды. Поскольку $e_i(x)$ — многочлены, и их конечное число, и то же самое верно для компонент отображения F, коэффициенты рядов $c_i^{(k)}$ при каждом фиксированном мономе с ростом k стабилизируются. Иными словами, $c_i^{(k)}\to c_i(x)$ при $k\to\infty$ в топологии формальных рядов, и $g(x)=\sum_{i=1}^{\mu}c_i(F(x))e_i(x)$. Пусть c_i — свободный член ряда $c_i(y)$; тогда имеет место равенство $g(x)=\sum_{i=1}^{\mu}c_ie_i(x)+h(x)$, где $h(x)$ — элемент $\langle F^*\,\mathrm{Q}_0\rangle$. Следовательно, элементы $e_1,\dots,e_\mu$ образуют полную систему в $\mathcal{A}_F^{\text{form}}$.

Пусть теперь в $\mathcal{A}_F^{\mathrm{form}}$ имеется линейная зависимость: $\sum_{i=1}^{\mu} c_i e_i(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) F_k(x)$, где $a_k(x)$ — формальные ряды. Поскольку e_i — многочлены, и их конечное число, можно удалить у рядов a_i все мономы достаточно большой степени так, что равенство сохранится. Следовательно, линейная зависимость имела место и в $\mathcal{A}_F^{\mathrm{pol}}$, вопреки предположению. □

Пусть теперь $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — росток голоморфного отображения в начале координат. Оказывается, теорема Вейерштрасса верна и в этом случае:

Предложение 2 (подготовительная теорема Вейерштрасса, голоморфный случай). *Для всякого ростка $g \in \mathrm{Q}$ существуют ростки $c_1, \ldots, c_\mu$ такие, что $g(x) = \sum_{i=1}^{\mu} e_i(x) c_i(F(x))$. При этом найдется такая окрестность $U \ni 0$, что если g — произвольный многочлен, то $c_i(y)$ определено при $y \in U$.*

Росток голоморфной функции в начале координат это просто ряд Тейлора с ненулевым радиусом сходимости. Таким образом доказательство в голоморфном случае (мы не будем его проводить подробно) отличается от формального случая лишь необходимостью оценить радиус сходимости. Второе утверждение теоремы доказать совсем несложно: нужно взять окрестность, в которой определены функции $c_i(y)$, входящие в разложение всех функций вида $g(x) = x_i e_k(x)$, $i = 1, \ldots, n$. $k = 1, \ldots, \mu$ — таких функций конечное число.

Пример 1. Пусть $n = 1$ и $F(z) = z^2$. Локальная алгебра в данном случае изоморфна $\mathbb{C}[z]/(z^2)$, и базис в ней составляют многочлены $e_1(z) = 1$ и $e_2(z) = z$. Тогда теорема утверждает, что всякий формальный ряд представим в виде $c_1(z^2) + z c_2(z^2)$, что соответствует разложению ряда (или многочлена, или голоморфного отображения) на четную и нечетную части.

Пример 2. Пусть $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{(n)}$ — стандартная проекция декартовой степени на симметрическую. Как мы уже проверяли, локальная алгебра в данном случае имеет размерность $n!$, и ее базис состоит из мономов вида $\xi_k = z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}$, где $0 \le k_s \le s - 1$. Подготовительная теорема Вейерштрасса утверждает в данном случае, что всякий многочлен g однозначно представим в виде $\sum_k \xi_k a_k(z)$, где $a_k(z)$ — симметрические многочлены.

Для доказательства теоремы 1 рассмотрим сначала, как ведет себя индекс точки при шевелении голоморфного ростка F:

Предложение 3. (1) *Если $F(0) = 0$ и $F'(0)$ — невырожденный оператор, то $\mathrm{ind}_0(F) = 1$.*
(2) *$\mathrm{ind}_0(F) \ge 0$ для любого ростка F. Если $F(0) = 0$, то неравенство строгое.*
(3) *Если F_ε — семейство голоморфных ростков, и $F_0 = F$, то при достаточно малом ε росток F_ε имеет не более k нулей (вблизи начала координат), где $k = \mathrm{ind}_0(F)$, и сумма их индексов равна k.*

Доказательство. Если $F(0) = 0$ и $F'(0)$ — невырожденное отображение, то сферу S_δ можно выбрать так, чтобы векторы $F(x) = F'(0)x + \ldots$ и $F'(0)x$ при $x \in S_\delta$ нигде не были направлены в противоположные стороны. Из этого следует, что все отображения $\Phi_t(x) = (1-t)F(x) + tF'(0)x$ не имеют нулей на этой сфере. Тогда степень гауссова отображения G_{Φ_t} не зависят от t, откуда $\deg G_{\Phi_0} = \mathrm{ind}_0(F) = \deg G_{\Phi_1}$, то есть $\mathrm{ind}_0(F)$ равен индексу нуля невырожденного линейного отображения $x \mapsto F'(0)x$. По определению степени отображения этот индекс равен знаку определителя овеществления этого оператора; но $\det F'(0)^{\mathbb{R}} = |\det F'(0)|^2 > 0$.

Пусть теперь F — произвольный росток (не обязательно с единственным нулем в начале координат). Тогда при достаточно малых ε степень гауссова отображения сферы S_δ для ростка $F(x) - \varepsilon$ такая же, как для самого F. С другой стороны, по лемме Сарда можно найти сколь угодно малое ε, для которого все нули ростка $F(x) - \varepsilon$ невырождены. Степень гауссова отображения равна сумме индексов всех этих нулей, то есть их количеству. Следовательно, степень гауссова отображения неотрицательна: $\mathrm{ind}_0(F) \ge 0$.

Пусть теперь F_ε — семейство ростков. Степень гауссова отображения на фиксированной сфере S_δ не зависит от ε (при малых ε). При произвольном ε она равна сумме индексов нулей отображения, попавших внутрь сферы. Пусть теперь F_ε имеет $k+1$ нуль $a_1, \ldots, a_{k+1}$. Рассмотрим многочлен P степени $k+1$, равный нулю в точках $a_1, \ldots, a_{k+1}$. При почти всех λ росток $F_\varepsilon - \lambda P$ имеет в точках $a_1, \ldots, a_{k+1}$ невырожденные нули. Отсюда следует, что степень гауссова отображения на сфере S_δ для этого ростка не меньше $k+1$. С другой стороны, при малых λ она такая же, как для F_ε, т.е. равна k. Это противоречие показывает, что общее число геометрически различных нулей ростка F_ε не превосходит k, и что индекс каждого такого нуля строго положителен.

Последнее утверждение вытекает из того, что степень гауссова отображения равна сумме индексов нулей внутри сферы. □

Рассмотрим теперь поведение локальной алгебры при распадении корня.

Предложение 4. *Пусть F_ε — семейство ростков, для которого $F_0 = F$. Тогда сумма кратностей всех нулей ростка F_ε (при малых ε) не превосходит $\mu_0(F)$.*

Доказательство. Пусть $\mu = \mu_0(F)$, и $e_1(x), \ldots, e_\mu(x)$ — базис в локальной алгебре $\mathcal{A}_F$. Предположим, что параметр деформации ε принадлежит $\mathbb{C}^k$, и рассмотрим росток $\Psi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$, заданный формулой $\Psi(z, \varepsilon) = (F_\varepsilon(z), \varepsilon)$. Нетрудно видеть, что локальные алгебры ростков F м Ψ изоморфны — это следует из того, что отображения F_ε и $F = F_0$ отличаются на члены, кратные компонентам ε — иными словами, каждая компонента $F - F_\varepsilon$ равна нулю в алгебре $\mathcal{A}_\Psi$. Тем самым $e_1(x), \ldots, e_\mu(x)$ — базис в $\mathcal{A}_\Psi$.

Подготовительная теорема Вейерштрасса (предложение 2) теперь утверждает, что для каждого многочлена g найдутся голоморфные ростки $c_1(y, \tau), \ldots, c_\mu(y, \tau)$, для которых $g(z) = \sum_{i=1}^{\mu} c_i(F_\varepsilon(z), \varepsilon) e_i(z)$, причем ростки c_i для всех многочленов определены при $y \in U$, где U — заранее заданная окрестность начала координат в $\mathbb{C}^n$.

Обозначим $\mathrm{Q}(U)$ алгебру голоморфных функций (не ростков !) в области U, а $\mathrm{Q}_0(U)$ — ее подалгебру, состоящую из функций с условием $f(0) = 0$. Тогда $g(x) = \sum_{i=1}^{\mu} c_i(0, \varepsilon) e_i(x) + h(x)$, где h принадлежит идеалу $I_\varepsilon = \langle F_\varepsilon^* \mathrm{Q}_0(U) \rangle \subset \mathrm{Q}(U)$. Следовательно, образ $\mathcal{P}$ алгебры многочленов при отображении факторизации $\mathrm{Q}(U) \to \mathrm{Q}(U)/I_F$ имеет размерность, не большую μ.

Пусть теперь росток F_ε имеет k нулей $a_1, \ldots, a_k$. Определим гомоморфизм $\pi : \mathrm{Q}(U) \to \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{A}_{F_\varepsilon, a_i}$, сопоставляющий каждой функции $\varphi \in \mathrm{Q}(U)$ набор образов ее ростков в точках $a_1, \ldots, a_k$ в локальных алгебрах $\mathcal{A}_{F_\varepsilon, a_i}$ отображения F_ε в этих точках. Нетрудно видеть, что $\pi|_{I_\varepsilon} = 0$, и тем самым π можно считать отображением $\mathrm{Q}(U)/I_\varepsilon \to \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{A}_{F_\varepsilon, a_i}$.

Образ ростка в локальной алгебре зависит только от достаточно большого количества его производных в соответствующей точке. Поскольку многочлен может иметь в точках $a_1, \ldots, a_k$ произвольные заранее заданные наборы производных, образ пространства $\mathcal{P}$ при отображении π — вся алгебра $\bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{A}_{F_\varepsilon, a_i}$. Отсюда вытекает, что $\sum \mu_{a_i}(F_\varepsilon) = \dim \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{A}_{F_\varepsilon, a_i} = \sum_{i=1}^{k} \mu_{a_i}(F) \le \dim \mathcal{P} \le \mu = \mu_0(F)$. $\square$

Следствие. *Для произвольного ростка F такого, что $F^{-1}(0) = \{0\}$, имеет место неравенство $\mu_0(F) \ge \mathrm{ind}_0(F)$*

Для доказательства положим $F_\varepsilon(x) = F(x) - \varepsilon$, и выберем достаточно общее ε.

Доказательство теоремы 1. Заметим сначала, что утверждение теоремы выполнено для ростков специального вида — мономиальных: если $F(z) = (z_1^{m_1}, \ldots, z_n^{m_n})$, то $\mu_0(F) = \mathrm{ind}_0(F) = m_1 \ldots m_n$. Заметим также, что поскольку $\mathcal{A}_F$ конечномерна, найдется такое число N, что все мономы $z_i^N \in J_F$.

Рассмотрим теперь отображение $\Phi_\varepsilon(z) = \varepsilon F(z) + (z_1^N, \ldots, z_n^N$. Ввиду доказанного выше, вторые слагаемое можно представить в виде $(\sum_{i=1}^{n} h_{i1}(x) F_i(x), \ldots, \sum_{i=1}^{n} h_{in}(x) F_i(x))$, где $h_{ij}(0) = 0$. Таким образом, $\Phi_\varepsilon(x) = (\varepsilon + H(x)) F(x)$, где $H(x)$ — некоторая матрица, и $H(0) = 0$. Матрица $\varepsilon + H(x)$ при малых x обратима, откуда вытекает, что $\mu_0(\Phi_\varepsilon) = \mu_0(F) = \mu$ и $\mathrm{ind}_0(\Phi_\varepsilon) = \mathrm{ind}_0(F)$ (кратность и индекс, очевидно, не меняется при обратимых линейных преобразованиях образа ростка).

С другой стороны, согласно предложению 4 и его следствию, а также предложению 3, $N^n = \mu_0(\Phi_0) \ge \sum_{i=1}^{k} \mu_{ai(\Phi_\varepsilon) \ge \sum_{i=1}^{k} \mathrm{ind}_{a_i}(\Phi_\varepsilon) = \mathrm{ind}_0(\Phi_0) = N^n}$. Отсюда вытекает, что все неравенства в этой цепочке являются равенствами, и, в частности, $\mu_{a_i}(\Phi_\varepsilon) = \mathrm{ind}_{a_i}(\Phi_\varepsilon)$. Это относится в том числе и к точке $a_{i_0} = 0$ (такая имеется !). $\square$