ЛЕКЦИЯ 4

Краткое содержание. Формула для чисел Бетти симметрической степени. Равенство $(S^n)^{(\infty)} = K(\mathbb{Z}, n)$.

Пусть X — произвольное топологическое пространство. Напомним, что *k-м числом Бетти* пространства X называется число $\beta_k(X) = \dim H^k(X, \mathbb{C})$, а *рядом Пуанкаре* называется формальный ряд $P(X)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(X) t^k$. В дальнейшем под когомологиями мы всегда будет подразумевать когомологии с коэффициентами в поле (скажем, $\mathbb{C}$).

Оказывается, если известны числа Бетти пространства X, можно однозначно определить числа Бетти всех его симметрических степеней. Ответ дается следующей теоремой Макдональда:

Теорема 1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n P(X^{(n)})(t) = \prod_{s=0}^{\infty} \frac{(1+t^{2s+1}q)^{\beta_{2s+1}(X)}}{(1-t^{2s}q)^{\beta_{2s}(X)}}. \tag{1}$$

Для доказательства рассмотрим сначала декартову степень X^n. На ней действует перестановками сомножителей симметрическая группа Σ_n, причем проекция инвариантна относительно этого действия: $\pi \circ \sigma = \pi$ для всякого $\sigma \in \Sigma_n$. Согласно формуле Кюннета, $H^*(X^n) = H^*(X)^{\otimes n}$; следовательно, Σ_n действует на этой тензорной степени. Нетрудно проверить (обратившись, например, к доказательству формулы Кюннета), что перестановка σ переводит тензор $a_1 \otimes \dots \otimes a_n$ в тензор $(-1)^{d_1+\dots+d_n} a_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes a_{\sigma(n)}$, где подразумевается $a_1 \in H^{d_1}(X), \dots, a_n \in H^{d_n}(X)$.

Предложение 1. *$H^*(X^{(n)}) = \left(H^*(X)^{\otimes n}\right)^{\Sigma_n}$, где в правой части равенства стоит пространство тензоров, инвариантных относительно описанного действия Σ_n.*

Доказательство. Пусть Δ — сингулярный цикл в пространстве $X^{(n)}$. Непосредственно из определения симметрической степени вытекает, что существует сингулярный цикл $\mu(\Delta)$ в пространстве X^n, инвариантный относительно Σ_n и такой, что $\pi_*(\mu(\Delta)) = \Delta$. Следовательно, оператор в гомологиях $\pi_* : H_*(X^n) \to H_*(X^{(n)})$ имеет полный образ (является сюръекцией), откуда вытекает, что двойственный ему оператор в когомологиях $\pi^* : H^*(X^{(n)}) \to H^*(X)^{\otimes n}$ — вложение. С другой стороны, из инвариантности проекции $\pi : X^n \to X^{(n)}$ относительно действия симметрической группы на X^n вытекает, что оператор π^* инвариантен относительно действия той же группы на когомологиях — следовательно, имеет место включение $H^*(X^{(n)}) \subset \left((H^*(X))^{\otimes n}\right)^{\Sigma_n}$.

Для доказательства обратного включения заметим, что цикл $\mu(\Delta)$ не только существует, но и единствен. Следовательно, оператор π_* не имеет ядра на симметрической части гомологий, откуда следует, что образ двойственного оператора π^* содержит все инвариантные тензоры. $\square$

Доказательство теоремы 1. Согласно предложению 1, нам нужно вычислить размерность пространства симметрических тензоров общей степени d в пространстве $H^*(X)^{\otimes n}$. Введем в $H^*(X)$ базис
$e_1^{(0)}, \dots, e_{\beta_0(X)}^{(0)}, e_{\beta_0(X)+1}^{(1)}, \dots, e_{\beta_0(X)+\beta_1(X)}^{(1)}, \dots$, где сверху обозначена степень элемента. Симметрический тензор однозначно определяется своим лексикографически старшим мономом вида $e_{i_1}^{(d_1)} \otimes \dots \otimes e_{i_n}^{(d_n)}$, где $i_1 \le i_2 \le \dots$, причем элементы нечетной степени не повторяются; общая степень элемента равна $d = d_1 + \dots + d_n$.

Раскроем теперь скобки в правой части формулы (1). Каждому моному описанного вида сопоставим выражение $q^{p_1} \dots q^{p_{\beta_0(X)}} (tq)^{p_{\beta_0(X)+1}} \dots$, где p_s — количество вхождений базисного элемента e_s в моном. Очевидно, выражение равно $t^d q^n$, так что коэффициент при $t^d q^n$ в правой части формулы равен $\beta_d(X^{(n)})$. $\square$

Пример 1. Пусть $X = \mathbb{C}P^1$, так что $\beta_0(X) = \beta_2(X) = 1$, и $\beta_i(X) = 0$ при прочих i. Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} q^n P(X^{(n)})(t) = \frac{1}{(1-q)(1-t^2q)}$, откуда вытекает, что $P(X^{(n)})(t) = \sum_{k=0}^{n} t^{2k}$, что согласуется с известным результатом $(\mathbb{C}P^1)^{(n)} = \mathbb{C}P^n$.

Пример 2. Пусть $X = S^1$, тогда $\sum_{n=0}^{\infty} q^n P(X^{(n)})(t) = \frac{1+tq}{1-q} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n(1+t)$. Таким образом, у всех симметрических степеней окружности когомологии такие же, как у самой окружности — также в соответствии с известным результатом о том, что $(S^1)^{(n)}$ гомотопически эквивалентна S^1.

Следствие 1. *Обозначим символом $\chi(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(Y)$ эйлерову характеристику пространства Y. Тогда имеет место тождество $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \chi(X^{(n)}) = (1-q)^{-\chi(X)}$.*

Для доказательства следует в теореме 1 положить $t=-1$.

Следствие 2. *Пусть X — компактное ориентируемое $2m$-мерное многообразие без края. Тогда числа Бетти любой симметрической степени $X^{(n)}$ удовлетворяют тождеству Пуанкаре: $\beta_i(X^{(n)})=\beta_{2mn-i}(X^{(n)})$.*

Доказательство — несложное упражнение. Тождеству Пуанкаре удовлетворяют, как известно, числа Бетти гладких компактных ориентируемых многообразий без края. Но следствие 2 отсюда не вытекает: если $m\neq 2$, симметрическая степень $X^{(n)}$ не является многообразием.

Пусть X — топологическое пространство с отмеченной точкой p. В этом случае для всякого n определено вложение $X^{(n)}\to X^{(n+1)}$, добавляющее к набору точек отмеченную. Можно, таким образом, рассматривать и предел всех таких вложений — бесконечную симметрическую степень $X^{(\infty)}$, которая есть множество всевозможных конечных неупорядоченных наборов точек в X, причем два набора считаются эквивалентными, если они отличаются добавлением (несколько раз) точки p.

Пространство $X^{(\infty)}$ обладает структурой коммутативного моноида, то есть коммутативным ассоциативным умножением с единицей: произведение двух наборов точек это просто их объединение. Единицей является пустой набор точек — или, что то же самое, набор, состоящий из точки p, повторенной произвольное количество раз.

Будем говорить, что моноид G удовлетворяет условию сокращения, если из равенства $hg=g$ вытекает равенство $h=e$. Примером такого моноида является любая группа, а также моноид $X^{(\infty)}$.

Предложение 2. *Для всякого моноида G, удовлетворяющего условию сокращения, существует стягиваемое пространство EG, пространство BG и отображение $\pi: EG\to BG$, являющееся расслоением в смысле Серра и такое, что прообраз произвольной точки $b\in BG$ гомеоморфен G.*

Доказательство. Обозначим $\Delta^k=\{(t_1,\dots,t_k)\mid 0\le t_1\le\dots\le t_k\le 1\}$; геометрически это k-мерный симплекс. Рассмотрим несвязное объединение $\mathfrak{G}=\bigsqcup_{k\ge 0} G\times\Delta^k\times G^k$, и произведем в нем следующие отождествления:

1. Если $t_1=0$, то $(g,0=t_1,\dots,t_k,g_1,\dots,g_k)\sim(gg_1,t_2,\dots,t_k,g_2,\dots,g_k)$.
2. Если $t_k=1$, то $(g,t_1,\dots,t_k=1,g_1,\dots,g_k)\sim(g,t_1,\dots,t_{k-1},g_1,\dots,g_{k-1})$.
3. Если $t_i=t_{i+1}$, то $(g,t_1,\dots,t_i,t_{i+1}=t_i,\dots,t_k,g_1,\dots,g_k)\sim(g,t_1,\dots,t_i,t_{i+2},\dots,t_k,g_1,\dots,g_ig_{i+1},\dots,g_k)$.
4. Если $g_i=1$, то $(g,t_1,\dots,t_k,g_1,\dots,g_i=1,\dots,g_k)\sim(g,t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_k,g_1,\dots,g_{i-1},g_{i+1}\dots,g_k)$.

Фактор $\mathfrak{G}$ по всем этим отождествлениям и есть EG; докажем это. Заметим, что отождествления позволяют однозначно представить каждый элемент фактора в стандартной форме, для которой $0<t_1<\dots<t_k<1$.

Для доказательства стягиваемости EG заметим, что имеет место эквивалентность $x=(g,t_1,\dots,t_k,g_1,\dots,g_k)\sim(e,0,t_1,\dots,t_k,g,g_1,\dots,g_k)$. Определим при $0\le\tau\le 1$ преобразование u_τ формулой $u_\tau(x)=(e,\tau,\tau+(1-\tau)t_1,\dots,\tau+(1-\tau)t_k,g,g_1,\dots,g_k)$. Тогда $u_0(x)=x$, и $u_1(x)=(e)$, откуда вытекает, что пространство EG стягиваемо.

В качестве BG возьмем множество всех наборов вида $(t_1,\dots,t_k,g_1,\dots,g_k)$ по модулю указанных выше отождествлений; отображение π "забывает" первый элемент набора. Гомеоморфизм $\pi^{-1}(b)$ и G вытекает из условия сокращений. Условие накрывающей гомотопии (т.е. тот факт, что отображение π — расслоение в смысле Серра) проверяется прямой конструкцией; мы не будем проводить это доказательство подробно. □

В случае, когда моноид G — группа, она действует на пространстве EG по формуле $h(g,t_1,\dots,t_k,g_1,\dots,g_k)=(hg,t_1,\dots,t_k,g_1,\dots,g_k)$; это действие свободно, а BG в этом случае — пространство орбит. Отображение π для группы называется универсальным расслоением, а BG — классифицирующим пространством. Можно доказать (нам это не понадобится), что классифицирующее пространство гомотопически единственно: если группа G действует свободно на некотором стягиваемом пространстве, то множество орбит гомотопически эквивалентно BG.

Возьмем теперь в качестве моноида $G=X^{(\infty)}$; он удовлетворяет условию сокращений. Напомним, что приведенным конусом над пространством X (обозначение cX) называется цилиндр $[0,1]\times X$, верхнее основание и одна из образующих которого стянуты в точку: $(1,x)\sim(1,y)$ для всех $x,y\in X$, и $(t_1,p)=(t_2,p)$ при всех $t_1,t_2\in[0,1]$. Приведенной надстройкой над X (обозначение ΣX) называется цилиндр, оба основания которого и одна из образующих стянуты в точку. В частности, $cS^n=D^{n+1}$ (шар размерности $n+1$), а $\Sigma S^n=S^{n+1}$.

Теорема 2. *$EX^{(\infty)}=(cX)^{(\infty)}$, $BX^{(\infty)}=(\Sigma X)^{(\infty)}$.*

Доказательство. Точка $x\in EX^{(\infty)}$ это, согласно предложению 2, набор $(e,0,t_1,\dots,t_k,x_1,\dots,x_k)$, где $t_1\le\dots\le t_k\le 1$, а e — единица моноида $X^{(\infty)}$ (пустой набор точек), а $x_1,\dots,x_k$ — элементы $X^{(\infty)}$, то есть неупорядоченные конечные наборы точек в X: $x_i=((x_{i,1},\dots,x_{i,m_i}))$. Этот элемент можно записать в эквивалентной форме, где все наборы точек x_i состоят из одной точки (если точек в наборе несколько, то применяем нужно число раз отождествление 3 "справа налево"). Сопоставим такому элементу набор точек $(t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k)$ в пространстве $(cX)^{(\infty)}$. Добавление точки p к набору x_i не меняет результата, поскольку

cX — редуцированный конус, и все точки вида (t,p) эквивалентны его вершине, которую мы примем за отмеченную точку. Таким образом, получилось отображение $f: EX^{(\infty)} \to (cX)^{(\infty)}$. Нетрудно видеть, что оно взаимно однозначно: обратное отображение f^{-1} сопоставляет набору точек $\xi = ((\,(t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k)\,))$ в пространстве $(cX)^{(\infty)}$ точку $(e,0,t_1,\dots,t_k,x_1,\dots,x_k) \in EX^{(\infty)}$; нужно лишь проверить корректность.

Добавление к набору точки вида $(1,x)$ (вершины конуса) не меняет $f^{-1}(\xi)$ в силу эквивалентности 2. Добавление точки вида (t,p) (точки стянутой образующей) также не меняет $f^{-1}(\xi)$ — в силу эквивалентности 4. Числа $t_1,\dots,t_k$ можно предположить упорядоченными; если $t_i = t_{i+1}$, то перестановка точек (t_i,x_i) и (t_{i+1},x_{i+1}) также не меняет $f^{-1}(\xi)$ — в силу эквивалентности 3 и коммутативности моноида $X^{(\infty)}$. Корректность проверена.

Равенство $BX^{(\infty)} = (\Sigma X)^{(\infty)}$ доказывается аналогично. □

Пусть π — группа, а n — натуральное число. Напомним, что пространством Эйленберга–Маклейна $K(\pi,n)$ называется клеточное пространство, для которого выполнены равенства $\pi_n(K(\pi,n)) = \pi$, и $\pi_i(K(\pi,n)) = 0$ для всех $i \neq n$. Пространство $K(\pi,n)$ существует для любой группы π при $n=1$, и для любой абелевой группы π при $n \geq 2$; оно гомотопически единственно.

Теорема 3. *$(S^n)^{(\infty)} = K(\mathbb{Z},n)$.*

Пример 3. $(S^1)^{(\infty)}$ представляет собой тотальное пространство расслоения с базой S^1 и стягиваемым слоем. Следовательно, оно гомотопически эквивалентно $S^1 = K(\mathbb{Z},1)$.

Пример 4. $(S^2)^{(\infty)} = (\mathbb{C}P^1)^{(\infty)} = \mathbb{C}P^\infty$. Для доказательства равенства $\mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z},2)$ рассмотрим бесконечномерную сферу S^∞, представленную как множество последовательностей $(z_1,z_2,\dots)$ комплексных чисел, равных нулю начиная с некоторого номера (своего для каждой последовательности), для которых выполнено равенство $\sum_{k=1}^\infty |z_k|^2 = 1$. Сфера S^∞ является пределом последовательности сфер $S^1 \subset S^3 \subset S^5 \subset \dots$, в которой каждая сфера вложена в следующую как экватор экватора. Отсюда вытекает, что S^∞ стягиваема — поскольку экватор можно стянуть по сфере в точку. Обобщенное расслоение Хопфа сопоставляет точке $(z_1,z_2,\dots) \in S^\infty$ точку $[z_1:z_2:\dots] \in \mathbb{C}P^\infty$. Очевидно, слой этого расслоения равен S^1. Из точной гомотопической последовательности расслоения получаем теперь равенство $\pi_{i+1}(\mathbb{C}P^\infty) = \pi_i(S^1)$ для всех i, откуда $\mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z},2)$.

Доказательство теоремы 3. Индукция по n; базу индукции составляет пример 3. Рассмотрим отображение $\pi: E(S^n)^{(\infty)} \to B(S^n)^{(\infty)}$, описанное в предложении 2. Это отображение представляет собой расслоение в смысле Серра, так что для него можно написать точную гомотопическую последовательность. Поскольку пространство $E(S^n)^{(\infty)}$ стягиваемо, из этой последовательности вытекает равенство $\pi_{i+1}(B(S^n)^{(\infty)}) = \pi_i((S^n)^{(\infty)})$ для всех i. По предположению индукции $(S^n)^{(\infty)} = K(\mathbb{Z},n)$, а согласно теореме 2 $B(S^n)^{(\infty)} = (S^{n+1})^{(\infty)}$. □