ЛЕКЦИЯ 5

Abstract. Схема Гильберта $(\mathbb{C}^k)^{[n]}$ наборов n точек на $\mathbb{C}^k$: определение и модель Атия–Дринфельда–Хитчина–Манина. Равенство $\chi((\mathbb{C}^2)^{[n]}) = p(n)$.

Рассмотрим подробно симметрические степени пространства $\mathbb{C}^k$ — их структура, очевидно, отражает локальную структуру симметрических степеней произвольного комплексного многообразия.

Мы уже доказали ранее, что $(\mathbb{C}^1)^{(n)} = \mathbb{C}^n$. Вычисления для локальной алгебры отображения факторизации показывают, что при $k > 1$ (и $n > 1$) симметрическая степени $(\mathbb{C}^k)^{(n)}$ негладкая.

Непрерывное отображение $f : Y \to X$ двух стратифицированных (или алгебраических) многообразий называется разрешением особенностей, если в некоторой окрестности U произвольной точки гладкости $p \in X$ отображение представляет собой диффеоморфизи $f : V \to U$, где $V \subset Y$. Прообраз особой точки многообразия X может состоять из многих точек; в большинстве примеров этот прообраз бесконечен. Это обычно приводит к тому, что особенности многообразия Y устроены проще, чем особенности многообразия X; многообразие Y может быть даже гладким ("полное" разрешение особенностей).

Пример 1. Пусть $X \subset \mathbb{C}^2$ задано уравнением $xy(x-y) = 0$. Это многообразие размерности 1 (кривая) с одной особой точкой $x = y = 0$, в которой пересекаются три прямые. В качестве Y возьмем подмногообразие в $\mathbb{C}^3$, заданное системой уравнений $x^2z = x$, $y^2z = y$; отображение f — проекция: $f(x, y, z) = xy$. Многообразие Y гладкое, состоит из 4 непересекающихся компонент: прямой $L : x = y = 0$ и трех гипербол $H_1 : xz = 1,\ y = 0$, $H_2 : yz = 1, x = 0$ и $H_3 : x = y, xz = 1$. Если $a \neq (0, 0)$, то $f^{-1}(a)$ состоит из одной точки, а множество $f^{-1}(0, 0)$ есть прямая L.

Оказывается, для $X = (\mathbb{C}^k)^{(n)}$ существует разрешение особенностей $f : Y \to X$. В качестве Y выступает *схема Гильберта наборов из* n *точек на* $\mathbb{C}^k$ (обозначение $(\mathbb{C}^k)^{[n]}$), а отображение f называется *морфизмом Чжоу*. Схема Гильберта определяется как совокупность идеалов J в кольце многочленов $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_k]$ таких, что $\dim \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]/J = n$. Топология на схеме Гильберта вводится так: как нетрудно видеть, существует такая последовательность $a_{k,n}$ (достаточно взять $a_{k,n} = kn$), что всякий идеал коразмерности n содержит все многочлены степени $d > a_{k,n}$. Тем самым идеалы соответствуют некоторым подпространствам коразмерности n в пространстве многочленов степени, не превосходящей $a_{k,n}$. Это пространство конечномерно — обозначим его размерность $d_{k,n}$ — и тем самым схема Гильберта $(\mathbb{C}^k)^{[n]}$ представляет собой подмножество грассманиана $G(d_{k,n}, k)$. Это позволяет определить на $(\mathbb{C}^k)^{[n]}$ топологию, индуцированную с грассманиана.

Морфизм Чжоу $\mathcal{HC} : (\mathbb{C}^k)^{[n]} \to (\mathbb{C}^k)^{(n)}$ определяется так. Пусть $J \in (\mathbb{C}^k)^{[n]}$ — идеал. Для каждой точки $p \in \mathbb{C}^k$ определим ее кратность $n(p)$ следующим образом. Если в J содержится многочлен f такой, что $f(p) \neq 0$, то положим $n(p) = 0$. В противном случае $J \subset \mathfrak{m}_p$, где $\mathfrak{m}_p$ — максимальный идеал в $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_k]$, состоящий из всех многочленов, обращающихся в нуль в точке p. Положим, по определению, $n(p) = 1 + \dim \mathfrak{m}_p/(\mathfrak{m}_p \cap J)$.

Неравенство $n(p) \neq 0$ может выполняться только для точек из конечного множества $\{p_1, \ldots, p_s\}$, и при этом $\sum_{i=1}^{s} n(p_i) = n$. Морфизм Чжоу сопоставляет идеалу J точку $\mathcal{HC}(J) = ((p_1, p_1, \ldots, p_2, p_2, \ldots, p_s, \ldots)) \in (\mathbb{C}^k)^{(n)}$, где каждая точка p_i встречается $n(p_i)$ раз.

Точка $p = ((p_1, \ldots, p_n)) \in (\mathbb{C}^k)^{(n)}$ является точкой гладкости, если все p_i попарно различны. Для каждой такой точки существует ровно один идеал коразмерности n, состоящий в из многочленов, обращающихся в нуль во всех точках p_i. Таким образом, морфизм Чжоу действительно представляет собой разрешение особенностей.

Пример 2. Пусть $k = 1$. В этом случае мы имеем дело с идеалами в кольце многочленов от 1 переменной. Всякий такой идеал главный и порожден некоторым многочленом P степени n, который определен с точностью до уиножения на ненулевую константу. Морфизм Чжоу сопоставляет такому идеалу набор корней многочлена P, задавая тем самым P с требуемой точностью. Тем самым, морфизм Чжоу оказывавется взаимно однозначным во всех точках, откуда вытекает, что $\mathbb{C}^{[n]} = \mathbb{C}^{(n)} = \mathbb{C}^n$.

Пример 3. Пусть $n = 1$. Тогда $(\mathbb{C}^k)^{[1]}$ это множество идеалов коразмерности 1 в $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_k]$. Все такие идеалы — максимальные и имеют вид $\mathfrak{m}_p$ для некоторой точки $p \in \mathbb{C}^k$; точки и идеалы соответствуют друг другу взаимно однозначно. Следовательно, $(\mathbb{C}^k)^{[1]} = \mathbb{C}^k\,(= (\mathbb{C}^k)^{(1)})$, как и ожидается.

Для иллюстрации того, как устроена схема Гильберта $(\mathbb{C}^k)^{[n]}$ при произвольных k, n, предъявим другое ее описание. Пусть $B_1, \dots, B_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — линейные операторы, и $v \in \mathbb{C}^n$ — вектор. Такую систему назовем *циклической*, если

(1) Операторы B_i коммутируют: $[B_i, B_j] = 0$.
(2) Вектор v не принадлежит никакому общему инвариантному подпространству всех операторов B_i; иными словами, векторы $B_1^{a_1} \dots B_k^{a_k} v$ при всевозможных целых неотрицательных $a_1, \dots, a_k$ образуют полную систему векторов в пространстве $\mathbb{C}^n$.

На множестве циклических систем действует группа $\mathrm{GL}(n)$: $g(B_1, \dots, B_k, v) = (gB_1g^{-1}, \dots gB_kg^{-1}, gv)$.

Теорема 1. *Множество орбит этого действия находится во взаимно однозначном соответствии с* $(\mathbb{C}^k)^{[n]}$.

Доказательство. Рассмотрим идеал $J \in (\mathbb{C}^k)^{[n]}$. Пусть $V = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_k]/J$; поскольку это пространство n-мерно, отождествим его с $\mathbb{C}^n$ (выбрав базис). Тогда $B_i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — оператор, соответствующий при этом отождествлении оператору умножения на z_i, и $v \in \mathbb{C}^n$ — вектор, соответствуюший $1 \in V$. Условия цикличности, очевидно, выполнены, поскольку мономы $z_1^{a_1} \dots z_k^{a_k}$ порождают факторпространство $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_k]/J$. Из-за неоднозначности отождествления V и $\mathbb{C}^n$ получается, что циклическая система $(B_1, \dots, B_k, v)$ определена только с точностью до действия группы $\mathrm{GL}(n)$.

Обратно, пусть $(B_1, \dots, B_k, v)$ — циклическая система, определенная с точностью до действия группы $\mathrm{GL}(n)$. Сопоставим ей идеал $J \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_k]$, состоящий из всех многочленов f, для которых $f(B_1, \dots, B_k) = 0$. Поскольку система циклическая, это условие эквивалентно условию $J = \operatorname{Ker} \varphi$, где $\varphi : \mathbb{C}[z_1, \dots, z_k] \to \mathbb{C}^n$ — "отображение вычисления", действующее по формуле $\varphi(f) = f(B_1, \dots, B_k)v$. Очевидно, действие группы $\mathrm{GL}(n)$ не меняет идеала J, так что конструкция корректна. Поскольку система $(B_1, \dots, B_k, v)$ циклическая, образом отображения φ является все пространство $\mathbb{C}^n$, и, следовательно, пространство $V = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_k]/J$ имеет размерность n. При естественном отождествлении $V \cong \mathbb{C}^n$ оператор умножения на z_i переходит в оператор B_i, а элемент $1 \in V$ — в вектор v. □

Такое описание схемы $(\mathbb{C}^k)^{[n]}$ называется моделью Атия–Дринфельда–Хитчина–Манина (ADHM). В терминах этой модели нетрудно описать морфизм Чжоу. Действительно, поскольку операторы $B_1, \dots, B_k$ коммутируют, их можно привести в некотором базисе к верхнетреугольному виду, причем на диагонали i-ой матрицы будут стоять собственные значения $\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_n^{(i)}$ оператора B_i с надлежащими кратностями.

Предложение 1. *Морфизм Чжоу $\mathcal{HC}$ сопоставляет циклической системе $(B_1, \dots, B_k, v)$ точку $((\lambda_1, \dots, \lambda_n)) \in (\mathbb{C}^k)^{(n)}$, где $\lambda_s = (\lambda_s^{(1)}, \dots, \lambda_s^{(k)})$.*

Доказательство. Поскольку операторы $B_1, \dots, B_k$ коммутируют, имеется базис, в котором все они имеют верхнетреугольный вид, причем можно предполагать, что для оператора B_1 этот базис жорданов, с собственными значениями $\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_n^{(1)}$. Поскольку все операторы B_i коммутируют, матрицы остальных операторов блочно-диагональны, размеры всех блоков — такие же, как размер жордановых клеток B_1, в каждом блоке под диагональю стоят нули, на диагонали — числа $\lambda_s^{(i)}$, $s = 1, \dots, n$, а над диагональю — элементы a_{ij}, значения которых зависят только от $i - j$.

Пусть $f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_k]$. Матрица $f(B_1, \dots, B_k)$ также будет верхнетреугольной; на диагонали ее стоят числа $f(\lambda_s)$, $s = 1, \dots, n$. Следовательно, все точки λ_s принадлежат множеству нулей идеала J.

Остальные (недиагональные) элементы матрицы $f(B_1, \dots, B_k)$ выражаются через значения f и его частных производных в тех же точках. Из этого вытекает, что множество нулей идеала J не содержит никаких точек, кроме $\lambda_1, \dots, \lambda_n$: действительно, для всякого числа κ, отличного от всех λ_s, нетрудно найти многочлен f, который во всех точках $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ обращается в нуль вместе со всеми своими частными производными нужных порядков — и, следовательно, $f(B_1, \dots, B_k) = 0$, то есть $f \in J$ — но $f(\kappa) \neq 0$.

Пусть теперь какой-нибудь набор собственных значений λ_s имеет кратность k. Это означает, что оператор B_1 имеет жорданову клетку $k \times k$ с собственным значением $\lambda_s^{(1)}$. Оператор $f(B_1, \dots, B_k)$ также будет блочно-диагональным; блоки устроены так же, как у самих операторов B_i. Поэтому условие $f(B_1, \dots, B_k)$ накладывает на многочлен f ровно k линейных условий, сосредоточенных в точке λ_s. Отсюда вытекает, что $n_J(\lambda_s) \geq k$ (вообще говоря, условия могли бы быть линейно зависимы). Поскольку сумма кратностей всех нулей идеала J равна n, на самом деле имеет место равенство. □

Примеры описания схем Гильберта $(\mathbb{C}^k)^{[n]}$ в модели ADHM:

Пример 4. Пусть $n = 1$. Тогда имеется набор операторов $B_1, \dots, B_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, то есть набор чисел; они автоматически коммутируют. Вектор $v \in \mathbb{C}$ является циклическим, если $v \neq 0$; действуя группой $\mathrm{GL}(1)$ (которая не меняет чисел B_i), можно добиться равенства $v = 1$. Отсюда $(\mathbb{C}^k)^{[1]} = \mathbb{C}^k$.

Пример 5. Пусть $k=1$. Тогда имеется только один оператор B, который действием группы $\mathrm{GL}(n)$ можно привести к жордановой форме; после этого, действуя операторами, коммутирующими с B, можно добиться, чтобы вектор v стал равен $(0,\dots,1,0,\dots,1,\dots,0,\dots,1)$ — по одной единице на каждую жорданову клетку B, в соответствующих местах. После этого действие $\mathrm{GL}(n)$ может обменивать жордановы клетки местами. Таким образом получается равенство $\mathbb{C}^{[n]}=\mathbb{C}^{(n)}$.

Пример 6. Пусть $k=2$ и $n=2$. Рассмотрим пространство Y, элементами которого являются тройки (a_1,a_2,ℓ), где $a_1,a_2\in\mathbb{C}^2$, а ℓ — комплексная прямая в $\mathbb{C}^2$, содержащая точки a_1,a_2. Для данных $a_1\neq a_2$ существует только одна прямая ℓ; если же $a_1=a_2$, то множество прямых ℓ гомеоморфно $\mathbb{C}P^1$.

Имеет место такое утверждение:

Предложение 2. *Схема Гильберта $(\mathbb{C}^2)^{[2]}$ гомеоморфна фактору пространства Y по обмену местами точек $a_1\leftrightarrow a_2$.*

Доказательство. В модели ADHM точками $(\mathbb{C}^2)^{[2]}$ являются орбиты группы $\mathrm{GL}(2)$ в множестве троек (B_1,B_2,v), где $B_1,B_2:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ — коммутирующие операторы, а v — циклический вектор.

Разберем сначала случай, когда оператор B_1 имеет простой спектр (λ_1,λ_2). Тогда он диагонален в некотором базисе; коммутирующий с ним оператор B_2 в этом базисе тоже диагонален, с диагональю (μ_1,μ_2) (где, возможно, $\mu_1=\mu_2$). После этого, действуя на тройку (B_1,B_2,v) диагональными операторами из $\mathrm{GL}(2)$, можно добиться равенства $v=(1,1)$; после этого остается возможность действовать только оператором $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. Таким образом, орбите тройки (B_1,B_2,v) под действием $\mathrm{GL}(2)$ однозначно сопоставляется неупорядоченная пара различных точек $a_1=(\lambda_1,\mu_1)$, $a_2=(\lambda_2,\mu_2)$, где $\lambda_1\neq\lambda_2$. Здесь $a_1\neq a_2$, и поэтому прямая ℓ определена однозначно.

Случай, когда B_2 имеет простой спектр, разбирается аналогично.

Пусть теперь оба оператора имеют кратный спектр. Поскольку они коммутируют, их можно одновременно привести к верхнетреугольному виду: $B_1=\begin{pmatrix}\lambda&b_1\\0&\lambda\end{pmatrix}$, $B_2=\begin{pmatrix}\mu&b_2\\0&\mu\end{pmatrix}$. Из условия цикличности вытекает, что равенство $b_1=b_2=0$ невозможно. Пусть теперь $A=(a_{ij})\in\mathrm{GL}(2)$ таково, что AB_1A^{-1} и AB_2A^{-1} по-прежнему верхнетреугольны. Это означает, что A сама верхнетреугольна: $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\0&a_{22}\end{pmatrix}$. Диагональные элементы матриц при сопряжении не меняются, а угловые умножаются на одну и ту же константу, $(b_1,b_2)\mapsto(\frac{a_{11}}{a_{22}}b_1,\frac{a_{11}}{a_{22}}b_2)$. Если b_1,b_2 фиксированы, то операторы B_1,B_2 еще можно сопрягать элементами $\mathrm{GL}(2)$ вида $C_a=\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}$. Циклический вектор v не может быть пропорционален $v_0=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, поскольку v_0 — собственный вектор B_1 и B_2; но тогда действием оператора C_a можно добиться, чтобы $v\mapsto\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, после чего неоднозначности уже не остается. Таким образом, орбита тройки (B_1,B_2,v) в описываемом случае однозначно сопоставляется точка $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ и точка $[b_1:b_2]\in\mathbb{C}P^1$. Это соответствует случаю $a_1=a_2=(\lambda,\mu)$ и проведенной через эту точку прямой ℓ в направлении $[b_1:b_2]$. □

На схеме Гильберта $(\mathbb{C}^k)^{[n]}$ действует группа $T_k=(S^1)^k$: элемент $t=(t_1,\dots,t_k)$, где все $t_i\in\mathbb{C}$, $|t_i|=1$, переводит идеал J в идеал $V_t(J)=\{f(t_1^{-1}z_1,\dots,t_k^{-1}z_k)\mid f\in J\}$. Нетрудно видеть, что в модели ADHM действие выглядит так: $(B_1,\dots,B_k,v)\mapsto(t_1B_1,\dots,t_kB_k,v)$.

Пусть теперь $k=2$, и $(\nu_0,\dots,\nu_{\ell-1})$ — разбиение числа n, то есть набор натуральных чисел, для которых $\nu_0\geq\nu_1\geq\dots\geq\nu_{\ell-1}$ и $\nu_0+\dots+\nu_{\ell-1}=n$. Рассмотрим идеал J_ν, порожденный мономами $z_1^az_2^b$ для всех $(a,b)\notin D_\nu$ (т.е. таких, что либо $i\geq\ell$, либо $j\geq\nu_i$).

Предложение 3. *Неподвижными точками действия T_2 на $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ являются в точности идеалы J_ν.*

Доказательство. Непосредственно видно, что $V_t(J_\nu)=J_\nu$ для всякого $t=(t_1,t_2)\in T_2$. Пусть теперь идеал J — неподвижная точка действия. В модели ADHM это означает, что $t_1B_1=\lambda(t)B_1\lambda(t)^{-1}$, $t_2B_2=\lambda(t)B_2\lambda(t)^{-1}$ и $\lambda(t)v=v$. Оператор V_t, сохраняя идеал J, действует на факторе $W=\mathbb{C}[z_1,z_2]/J$. Нетрудно видеть, что все собственные значения оператора V_t на пространстве W простые и равны $t_1^at_2^b$ для некоторого набора D пар целых чисел; обозначим соответствующие собственные векторы v_{ab}. Оператор B_1 переводит v_{ab} в кратное вектора $v_{a+1,b}$, а оператор B_2 — в кратное вектора $v_{a,b+1}$. Если $(a+1,b)\notin D$, то $B_1v_{ab}=0$; аналогично для B_2. Кроме того, $(0,0)\in D$, поскольку $1\notin J$. Отсюда немедленно выводится, что D представляет собой диаграмму Юнга некоторого разбиения $\nu\vdash n$, и $J=J_\nu$. □