ЛЕКЦИЯ 6

Краткое содержание. Гладкость $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$. Когомологии $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$.

Оказывается, что особенности схемы Гильберта действительно устроены проще, чем особенности симметрической степени. В частности, имеет место следующая теорема:

Теорема 1 (теорема Фогарти, локальная версия). *Схема Гильберта $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ гладкая и имеет размерность $2n$.*

Доказательство начнем с нескольких технических утверждений.

Лемма 1. *Для произвольных операторов A, B, C выполнено тождество $A[B,C] = [AB,C] + [CB,A] + C[A,B]$.*

Доказательство — непосредственная проверка.

Рассмотрим теперь отображение $\tau : \mathrm{Mat}(n\times n) \to \mathrm{Mat}(n\times n)^*$, сопоставляющее оператору A функционал $\tau_A(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Tr}(AX)$. Очевидно, τ является линейным изоморфизмом; формула $(A,B) = \tau_A(B)$ определяет на $\mathrm{Mat}(n\times n)$ скалярное произведение.

Для оператора $A \in \mathrm{Mat}(n\times n)$ символом ad_A обозначим оператор $\mathrm{Mat}(n\times n) \to \mathrm{Mat}(n\times n)$, действующий по формуле $\mathrm{ad}_A X = [A,X]$.

Следствие (леммы 1). *Оператор ad_A кососимметричен по отношению к введенному выше скалярному произведению: $(\mathrm{ad}_A B, C) = -(B, \mathrm{ad}_A C)$.*

Следствие вытекает из леммы 1 и равенства $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$ (верного, кстати, не только для элементов $\mathrm{Mat}(n\times n)$, но и для произвольных прямоугольных матриц X и Y при условии, что оба произведения XY и YX определены).

Лемма 2. *Аннулятор образа оператора ad_A совпадает с его ядром. Иными словами, $(A,[B,X]) = 0$ для всех $X \in \mathrm{Mat}(n\times n)$ тогда и только тогда, когда $[A,B] = 0$.*

Доказательство. Согласно следствию леммы 1, $(A,[B,X]) = (X,[A,B])$. Поскольку скалярное произведение невырождено (τ — изоморфизм), равенство $(X,P) = 0$ для всякого X равносильно $P = 0$. □

Теперь мы готовы доказать ключевое утверждение, из которого вытекает теорема Фогарти:

Предложение 1. *Множество всех циклических систем (B_1, B_2, v) в $\mathbb{C}^n$ имеет естественную структуру гладкого многообразия размерности $n^2 + 2n$.*

Заметим, кстати, что множество $\mathcal{C}$ пар коммутирующих операторов в пространстве $\mathbb{C}^n$ такой структуры не имеет. Оказывается, однако, что требование цикличности (существования вектора v) удаляет из $\mathcal{C}$ все точки негладкости.

Доказательство. Рассмотрмм оператор $f(B_1, B_2, v) = [B_1, B_2]$ и покажем, что его производная имеет постоянный ранг на множестве всех циклических систем (B_1, B_2, v). Имеем $f'(B_1, B_2, v) = C_{B_1,B_2}$, где $C_{P,Q} : \mathrm{Mat}(n\times n)^2 \times \mathbb{C}^n \to \mathrm{Mat}(n\times n)$ — оператор, заданный равенством $C_{P,Q}(X,Y,w) = [P,X] + [Q,Y]$.

Из леммы 2 вытекает, что аннулятор образа оператора C_{B_1,B_2} совпадает с множеством операторов A, для которых $[A,B_1] = [A,B_2] = 0$. Такой оператор A полностью определяется своим значением на векторе v; поэтому $\dim \mathrm{Ann}(\mathrm{Im}(C_{B_1,B_2})) = n$, откуда $\dim \mathrm{Im}\, C_{B_1,B_2} = n^2 - n$, и $\dim \mathrm{Ker}\, C_{B_1,B_2} = n^2 + 2n$. Доказываемое утверждение вытекает теперь из теоремы о неявной функции. □

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим действие группы $\mathrm{GL}(n)$ на многообразии циклических систем. Это действие гладкое и не имеет стабилизатора: действительно, если $[g, B_1] = [g, B_2] = 0$ и $gv = v$, то $gB_1^k B_2^l v = B_1^k B_2^l v$ для всех k, l, откуда $g = \mathrm{id}$. Следовательно, множество орбит имеет структуру гладкого многообразия размерности $n^2 + 2n - \dim \mathrm{GL}(n) = 2n$. □

Конструкцию схемы Гильберта и разрешения особенностей $\mathcal{HC} : X^{[n]} \to X^{(n)}$ нетрудно распространить на случай, когда X — произвольное комплексное многообразие. Действительно, если $V = ((V_1, \dots, V_n)) \subset X$ — неупорядоченный набор открытых подмножеств в $\mathbb{C}^n$, то обозначим $V^{[n]}$ множество идеалов в $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_k]$, носители которых содержат одну точку из V_1, еше одну точку — из V_2, и т.д. (множества V_i могут пересекаться, и точки могут даже совпадать — в этом последнем случае складываем кратности).

Произвольная точка $a \in X$ покрыта какой-нибудь картой U, которая переводится координатным отображением φ в множество $V \subset \mathbb{C}^k$. Пусть $a = ((a_1, \ldots, a_n)) \in X^{(n)}$, a_i покрыто картой U_i. Тогда "повесим" над a множество $\mathcal{HC}^{-1}(\varphi_1(a_1), \ldots, \varphi_n(a_n)) \subset V^{[n]}$, где $V = ((V_1, \ldots, V_n))$. Пусть теперь какая-нибудь точка a_i покрыта двумя картами U, U', с соответствующими областями $V, V' \subset \mathbb{C}^k$. Пусть $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_k) : V \to V'$ — отображение перехода:
$psi(\varphi(x)) = \varphi'(x)$. Отождествим тогда соответствующие подмножества в $V^{[n]}$ и ${V'}^{[n]}$ с помощью модели ADHM: циклической системе $(B_1, \ldots, B_k, v)$ сопоставим циклическую систему, в которой $B'_s = \psi_s(B_1, \ldots, B_k)$ $(s = 1, \ldots, k)$, и $v' = v$.

Очевидно, теорема 1 и доказанное ранее равенство $\mathbb{C}^{[n]} = \mathbb{C}^{(n)} = \mathbb{C}^n$ переносятся и на случай многообразий:

Теорема 2 (Фогарти). *Если X — гладкая комплексная кривая, то $X^{[n]} = X^{(n)}$ является гладким комплексным многообразием размерности n. Если X — гладкая комплексная поверхность, то $X^{[n]}$ является гладким комплексным многообразием размерности $2n$.*

Опишем теперь подробнее действие тора $\mathbb{T}^2$ на многообразии $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$. Как было доказано ранее, неподвижными точками этого действия являются идеалы J_ν, соответствующие разбиениям $\nu \vdash n$ и порожденные всеми мономами $z_1^a z_b^b$, где точка (a, b) лежит *вне* диаграммы Юнга D_ν разбиения ν. В модели ADHM эти идеалы соответствуют наборам (B_1, B_2, v), для которых существует такое семейство операторов $\lambda(t) \in \mathrm{GL}(n)$, $t \in \mathbb{T}^2$, что $t_1 B_1 = \lambda(t) B_1 \lambda(t)^{-1}$, и $t_2 B_2 = \lambda(t) B_2 \lambda(t)^{-1}$. Если отождествить $\mathbb{C}^n$ с пространством $V = \mathbb{C}[z_1, z_2]/J_\nu$, то собственными векторами оператора $\lambda(t)$ будут мономы $z_1^k z_2^l$, где $(k, l) \in D_\nu$, соответствующее собственное значение равно $t_1^k t_2^l$. Отсюда вытекает, что операторы $\lambda(t)$ при всевозможных t образуют представление группы $\mathbb{T}^2$ в пространстве V, то есть превращают V в $\mathbb{T}^2$-модуль. Множество линейных операторов $\mathrm{Hom}(V, V) = \mathrm{Mat}(n \times n)$ также теперь является $\mathbb{T}^2$-модулем (изоморфным $V \otimes V^*$: оператор X переходит под действием элемента t в $\lambda(t)^{-1} X \lambda(t)$.

Доказательство теоремы Фогарти позволяет явно описать касательное пространство $T_B(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ в произвольной точке $B = (B_1, B_2, v)$. Пусть $\varrho : \mathrm{Mat}(n \times n) \times \mathbb{C}^n \to \mathrm{Mat}(n \times n)$ — отображение, заданное равенством $\varrho(B_1, B_2, v) = [B_1, B_2]$; тогда $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ это фактор множества $\varrho^{-1}(0)$ по действию $\mathrm{GL}(n)$. Отсюда вытекает, что $T_B(\mathbb{C}^2)^{[n]} = \mathrm{Ker}(\Phi)/\mathrm{Im}(\Psi)$, где $\Psi = \varrho'(B)$, то есть $\Psi(X_1, X_2, w) = [B_1, X_2] - [B_2, X_1]$, а $\Psi : \mathrm{Mat}(n \times n) \to \mathrm{Hom}(T_B(\mathbb{C}^2)^{[n]})$ — касательное отображение к действию группы $\mathrm{GL}(n)$ в точке B, то есть $\Psi(Y) = ([B_1, Y], [B_2, Y], Yv)$.

Для удобства дальнейших рассуждений изменим слегка отображения Φ и Ψ. А именно, пусть областью определения Φ и областью значений Ψ будет пространство $G = \mathrm{Mat}(n \times n) \times \mathrm{Mat}(n \times n) \times \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^*$, и отображения определены теперь формулами: $\Psi(Y) = ([B_1, Y], [B_2, Y], Yv, 0)$ и $\Phi(X_1, X_2, w, \alpha) = [B_1, X_2] - [B_2, X_1] + v \otimes \alpha$. Это изменение не влияет на пространство $\mathrm{Ker}(\Phi)/\mathrm{Im}(\Psi)$, поскольку верно такое утверждение:

Предложение 2. *Если $[B_1, X_2] - [B_2, X_1] + v \otimes \alpha = 0$, то $\alpha = 0$.*

Доказательство. Поскольку система (B_1, B_2, v) циклична, достаточно доказать, что $\langle \alpha, B_1^k B_2^l v \rangle = 0$ для всех k, l. Действительно, $\langle \alpha, B_1^k B_2^l v \rangle = \mathrm{Tr}(B_1^k B_2^l v \otimes \alpha) = \mathrm{Tr}(B_1^k B_2^l([B_2, X_1] - [B_1, X_2])) = 0$ согласно лемме 1. □

Таким образом, по-прежнему $T_Z(\mathbb{C}^2)^{[n]} = \mathrm{Ker}(\Phi)/\mathrm{Im}(\Psi)$. В то же время теперь, как нетрудно проверить, $\mathrm{Ker}(\Psi) = 0$ и $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Mat}(n \times n)$.

Введем теперь в области определения и области значений операторов Φ и Ψ представления группы $\mathbb{T}^2$, которые превратят Φ и Ψ в гомоморфизмы $\mathbb{T}^2$-модулей. Для этого обозначим U_1 и U_2 одномерные представления $\mathbb{T}^2$, в которых (t_1, t_2) действует умножением на t_1 и t_2 соответственно.

В пространстве $\mathrm{Mat}(n \times n)$ — области определения Ψ — введем структуру $\mathbb{T}^2$-модуля $\mathrm{Hom}(V, V)$, как описано ранее. Поскольку $B = (B_1, B_2, v) = J_\nu$ — неподвижная точка действия тора, имеют место равенства $t_1 B_1 = \lambda(t) B_1 \lambda(t)^{-1}$ и аналогично для B_2. Отсюда вытекает, что $[B_1, \lambda(t)^{-1} Y \lambda(t)] = t_1 \lambda(t)^{-1} [B_1, Y] \lambda(t)$, и аналогично для B_2 (проверьте !). Тем самым если $\Psi(Y) = (X_1, X_2, w, 0)$, то
$\Psi(\lambda(t)^{-1} Y \lambda(t)) = (t_1 \lambda(t)^{-1} X_1 \lambda(t), t_2 \lambda(t)^{-1} X_2 \lambda(t), \lambda(t) w, 0)$. С другой стороны, $[B_1, t_2 \lambda(t)^{-1} X_2 \lambda(t)] = t_1 t_2 \lambda(t)^{-1} [B_1, X_2] \lambda(t)$, и аналогично для B_2. Таким образом, чтобы операторы Φ и Ψ были гомоморфизмами $\mathbb{T}^2$-модулей, нужно в пространстве G (области определения Φ; там же принимает значения Ψ) ввести структуру модуля $(\mathrm{Hom}(V, V) \otimes (U_1 \oplus U_2)) \oplus V \oplus (V^* \otimes U_1 \otimes U_2)$, а в области значений F оператора Ψ — структуру модуля $\mathrm{Hom}(V, V) \otimes U_1 \otimes U_2$.

Произвольный конечномерный модуль над $\mathbb{T}^2$ раскладывается в прямую сумму одномерных модулей $V_{ab} = U_1^a \otimes U_2^b$ — в таком модуле элемент $t = (t_1, t_2)$ действует умножением на $t_1^a t_2^b$. Сопоставим произвольному модулю $Q = \sum_{a,b} V_{ab}$ его "характер" $\chi(Q) = \sum_{a,b} T_1^a T_2^b$ — многочлен Лорана от T_1 и T_2 с целыми положительными коэффициентами. Очевидно, $\chi(Q_1 \oplus Q_2) = \chi(Q_1) + \chi(Q_2)$ и $\chi(Q_1 \otimes Q_2) = \chi(Q_1)\chi(Q_2)$. Наша задача — описать действие тора на касательном пространстве, то есть вычислить $\chi(T_{J_\nu}(\mathbb{C}^2)^{[n]})$.

Предложение 3. *Пусть J_ν — идеал, соответствующий разбиению $\nu \vdash n$. Для каждой клетки s диаграммы Юнга D_ν обозначим $a(s)$ количество клеток строго сверху от нее, а $\ell(s)$ — строго справа (во "французской" нотации). Тогда $\chi(T_{J_\nu}(\mathbb{C}^2)^{[n]}) = \sum_{s\in D_\nu}(T_1^{\ell(s)+1}T_2^{-a(s)} + T_1^{-\ell(s)}T_2^{a(s)+1})$.*

Доказательство. Из равенства $T_{J_\nu}(\mathbb{C}^2)^{[n]} = \mathrm{Ker}(\Phi)/\mathrm{Im}(\Psi)$ следует, что $\chi(T_{J_\nu}(\mathbb{C}^2)^{[n]}) = \chi(\mathrm{Ker}(\Phi)) - \chi(\mathrm{Im}(\Psi))$. Поскольку $\Psi : \mathrm{Hom}(V,V) \to G$ инъективен (имеет тривиальное ядро), имеем $\chi(\mathrm{Im}(\Psi)) = \chi(\mathrm{Hom}(V,V))$. Поскольку $\Phi : G \to \mathrm{Hom}(V,V)\otimes F$ сюръективен, имеем $\chi(\mathrm{Ker}(\Phi)) = \chi(G) - \chi(\mathrm{Hom}(V,V)\otimes U_1\otimes U_2)$. Таким образом, получаем что $\chi(T_{J_\nu}(\mathbb{C}^2)^{[n]}) = \chi(\mathrm{Hom}(V,V))(1 - T_1 - T_2 + T_1T_2) - \chi(V) - \chi(V^*)T_1T_2$.

С другой стороны, имеют место равенства $\chi(V) = \sum_{s=(i,j)\in D_\mu} T_1^iT_2^j$, $\chi(V^*) = \sum_{s=(i,j)\in D_\mu} T_1^{-i}T_2^{-j}$, $\chi(\mathrm{Hom}(V,V)) = \chi(V\otimes V^*) = \chi(V)\chi(V^*)$ Теперь формула для характера касательного пространства проверяется непосредственным вычислением. □

Теорема 3. *На многообразии $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ существует замкнутая нигде не вырожденная 2-форма μ (симплектическая структура), инвариантная относительно действия тора $\mathbb{T}^2$.*

Мы не будем доказывать эту теорему.

Зафиксируем векторное поле X, касательное к действию тора $\mathbb{T}^2$ на $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$. Иными словами, интегральные траектории поля X это орбиты действия какой-либо подгруппы $G \subset \mathbb{T}^2$, изоморфной S^1 (рациональная обмотка) или $\mathbb{R}^1$ (плотная обмотка).

Следствие. *На многообразии $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ существует гладкая функция f_X, для которой выполнено равенство $\iota_X\mu = df_X$.*

Доказательство. Поскольку действие группы $G \subset \mathbb{T}^2$ сохраняет форму μ, производная Ли $\mathcal{L}_X\mu$ равна нулю. С другой стороны, $0 = \mathcal{L}_X\mu = \iota_X d\mu + d\iota_X\mu = d\iota_X\mu$, поскольку μ замкнута. Нетрудно видеть, что многообразие $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ имеет клеточное разбиение, состоящее только из клеток четных размерностей и, следовательно, $H_1((\mathbb{C}^2)^{[n]}) = 0$. Отсюда следует, что замкнутая 1-форма $\iota_X\mu$ точна: $\iota_X\mu = df_X$. □

Теорема 4. *Многочлен Пуанкаре $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ равен $P_t((\mathbb{C}^2)^{[n]}) = \sum_{i=0}^{2n}\beta_i((\mathbb{C}^2)^{[n]})t^i = \sum_{\nu\vdash n} t^{2(n-|\nu|)}$, где $|\nu|$ — количество слагаемых в разбиении ν.*

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon \ll 1$, и число ε — общего положения. Рассмотрим векторное поле X_ε, интегральными траекториями которого являются орбиты действия подгруппы $G_\varepsilon = \{(e^{i\varphi}, e^{\varepsilon i\varphi})\} \subset \mathbb{T}^2$ на схеме Гильберта $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$. Тогда, согласно следствию теоремы 3, на $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ имеется гладкая функция f_ε, для которой $df_\varepsilon = \iota_{X_\varepsilon}\mu$, где μ — симплектическая структура. Можно показать (проделайте !), что функция f_ε — собственная, то есть для всякого $c\in\mathbb{R}$ множество $f_\varepsilon^{-1}((-\infty, c])$ компактно.

Критические точки f_ε совпадают с нулями поля X_ε, то есть, при общем ε, с неподвижными точками J_ν действия тора. Нетрудно видеть, что при общем ε все критические точки f — морсовские (невырожденные). Относительно действие подгруппы G_ε пространство $T_{J_\nu}(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ разложено, согласно предложению 3, на комплексно одномерные инвариантные подпространства, в которых элемент φ действует умножением $e^{i\varphi(-\ell(s)+\varepsilon(a(s)+1))}$ и на $e^{i\varphi(\ell(s)+1-\varepsilon a(s))}$, где s пробегает все клетки диаграммы Юнга D_ν. Очевидно, индекс критической точки J_ν функции f_ε (то есть количество отрицательных собственных значений гессиана — матрицы вторых производных функции f_ε в точке J_ν) равен суммарной вещественной размерности тех инвариантных подпространств, в которых множитель при $i\varphi$ отрицателен. Эти пространства все вещественно двумерны и соответствуют тем клеткам $s\in D_\nu$, в которых $\ell(s) > 0$, то есть всем клеткам, кроме конечных клеток каждой строки. Таких клеток $n - |\nu|$ штук, так что индекс равен $2(n-|\nu|)$. Поскольку все индексы — четные, дифференциалы в комплексе Морса функции f_ε все равны нулю, и $\beta_i((\mathbb{C}^2)^{[n]})$ равно, по теореме Морса, просто количеству критических точек f_ε, индекс которых равен i. Отсюда вытекает требуемое утверждение. □

Следствие. *Производящая функция многочленов Пуанкаре всех схем Гильберта точек в $\mathbb{C}^2$ равна $\sum_{n=0}^\infty q^nP_t((\mathbb{C}^2)^{[n]}) = \prod_{m=1}^\infty \frac{1}{1-t^{2m-2}q^m}$.*

Доказательство. Всякое разбиение $\nu\vdash n$ длиной $k = \ell(\nu)$ однозначно задается набором целых неотрицательных чисел $s_1,\dots,s_n$, для которых $s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n$ и $s_1+\dots+s_n = k$: число s_i это количество слагаемых, равных i, в разбиении ν. Отсюда вытекает, что

$$\sum_{n=0}^\infty q^nP_t((\mathbb{C}^2)^{[n]}) = \sum_{n=0}^\infty q^n\sum_{\nu\vdash n} t^{2(n-|\nu|)} = \sum_{n=0}^\infty \sum_{\substack{s_1,\dots,s_n\ge 0,\\ s_1+2s_2+\dots+ns_n=n}} q^{s_1+2s_2+\dots+ns_n}t^{2(0s_1+1s_2+2s_3+\dots+(n-1)s_n)} =$$

$$= \prod_{m=1}^\infty\sum_{s=0}^\infty q^{ms}t^{2(m-1)s} = \prod_{m=1}^\infty \frac{1}{1-t^{2m-2}q^m}.$$

□