ЛЕКЦИЯ 7

Краткое содержание. Формула Геттше. Симплектическая структура на $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$. Прообраз кратной точки при отображении Гильберта–Чжоу.

Теорема 1 (Геттше). *Для всякой гладкой комплексной поверхности X имеет место равенство*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \sum_{i=0}^{2n} \beta_i(X^{[n]}) t^i = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1+t^{2m-1}q^m)^{\beta_1(X)}(1+t^{2m+1}q^m)^{\beta_3(X)}}{(1-t^{2m-2}q^m)^{\beta_0(X)}(1-t^{2m}q^m)^{\beta_2(X)}(1-t^{2m+2}q^m)^{\beta_4(X)}}.$$

Мы не доказываем эту теорему. Член с $m=1$ является производящей функций Макдональда для когомологий симметрических степеней.

Следствие. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \chi(X^{[n]}) = \left(\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^m}\right)^{\chi(X)}$.

Заметим, что в правой части в скобках стоит производящая функция Эйлера для числа разбиений: $\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^m} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n$, где $p(n) \stackrel{\text{def}}{=} \#\{\nu \vdash n\}$.

Задача 1. Докажите формулу Геттше для $X = S^4$ с помощью теории Морса (аналогично формуле Геттше для $X = \mathbb{C}^2$).

Пусть $\alpha = (X_1, X_2, u)$, $\beta = (Y_1, Y_2, w)$ — два касательных вектора к $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ в точке (B_1, B_2, v). Иными словами, X_1, X_2, Y_1, Y_2 — операторы в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющие равенствам $[B_1, X_2] = [B_2, X_1]$, $[B_1, Y_2] = [B_2, Y_1]$, а u, w — произвольные векторы в $\mathbb{C}^n$. Положим по определению $\omega(\alpha, \beta) = \mathrm{Tr}(X_1 Y_2 - X_2 Y_1)$.

Предложение 1. *Эта формула определяет на $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ голоморфную симплектическую форму (т.е. голоморфную замкнутую невырожденную 2-форму).*

Доказательство. Обозначим P_1, P_2 операторы на множестве матриц, заданные равенствами $P_1(C) \stackrel{\text{def}}{=} [B_1, C]$ и $P_2(C) \stackrel{\text{def}}{=} [B_2, C]$. Как мы уже показывали ранее, эти операторы кососимметричны по отношению к билинейной форме $(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Tr}(AB)$ и обладают свойством $(\mathrm{Ker}\, P_i)^\perp = \mathrm{Im}\, P_i$.

Корректность: напомним, что пространство $T_B(\mathbb{C}^2)^{[n]}$, где B — $\mathrm{GL}(n)$-орбита циклической системы (B_1, B_2, v), представляет собой фактор множества троек (X_1, X_2, u), где X_1, X_2 — матрицы, для которых $P_1 X_2 = P_2 X_1$, а u — вектор, по множеству троек вида $(P_1 Z, P_2 Z, -Zv)$ для некоторого Z. Имеем: $(P_1 Z, Y_2) - (P_2 Z, Y_1) = -(Z, P_1 Y_2 - P_2 Y_1) = 0$.

Кососимметричность формы очевидна.

Невырожденность: пусть вектор (X_1, X_2, u) принадлежит ядру формы ω на множестве циклических систем, т.е. для всякого (Y_1, Y_2, w) такого, что $P_1 Y_2 = P_2 Y_1$, имеет место равенство $(X_1, Y_2) - (X_2, Y_1) = 0$. Пусть $A \in \mathrm{Ker}\, P_1$ — произвольный оператор; тогда $(0, A, 0)$ — касательный вектор. Отсюда вытекает, что $(A, X_1) = 0$ — следовательно, $X_1 = P_1 Z_1$ для некоторого оператора Z_1; аналогично получаем, что $X_2 = P_2 Z_2$. Отсюда вытекает, что для $0 = (Y_2, P_1, Z_1) - (Y_1, P_2, Z_2) = -(Z_1, P_1 Y_2) + (Z_2, P_2 Y_1) = (Z_2 - Z_1, P_1 Y_2)$. Иными словами, $Z_1 - Z_2 \in (\mathrm{Im}\, P_1 \cap \mathrm{Im}\, P_2)^\perp$.

Таким образом, нужно доказать, что в равенствах $X_1 = P_1 Z_1$, $X_2 = P_2 Z_2$ матрицы Z_1, Z_2 можно выбрать равными. Имеем: $\dim\{(P_1 Z, P_2 Z)\} = n^2 - \dim(\mathrm{Ker}\, P_1 \cap \mathrm{Ker}\, P_2) = n^2 - n$ (вытекает из цикличности системы (B_1, B_2, v)). С другой стороны, $\dim\{(P_1 Z_1, P_2 Z_2) \mid Z_1 - Z_2 \in (\mathrm{Im}\, P_1 \cap \mathrm{Im}\, P_2)^\perp\} = n^2 + \dim(\mathrm{Im}\, P_1 \cap \mathrm{Im}\, P_2)^\perp - \dim\{(Z_1, Z_2) \mid Z_1 \in \mathrm{Ker}\, P_1, Z_2 \in \mathrm{Ker}\, P_2, Z_1 - Z_2 \in (\mathrm{Im}\, P_1 \cap \mathrm{Im}\, P_2)^\perp\}$. Из равенств $\mathrm{Im P_i}^\perp = \mathrm{Ker}\, P_i$ вытекает, что вычитаемое в последней формуле равно $\dim \mathrm{Ker}\, P_1 + \dim \mathrm{Ker}\, P_2 = \dim(\mathrm{Ker}\, P_1 \oplus \mathrm{Ker}\, P_2) + \dim(\mathrm{Ker}\, P_1 \cap \mathrm{Ker}\, P_2) = \dim(\mathrm{Im}\, P_1 \cap \mathrm{Im}\, P_2)^\perp + n$. Окончательно получаем, что $\dim\{(P_1 Z, P_2 Z)\} = n^2 - n = \dim\{(P_1 Z_1, P_2 Z_2) \mid Z_1 - Z_2 \in (\mathrm{Im}\, P_1 \cap \mathrm{Im}\, P_2)^\perp\}$, что и требовалось.

Для доказательства замкнутости приведем геометрическое описание формы ω. Рассмотрим подмножество $\mathcal{X} \subset (\mathbb{C}^2)^n$, состоящее из всех наборов $(x_1, \dots, x_n)$, в которых каждая точка $x_i \in \mathbb{C}^2$ входит с кратностью, не превосходящей 2. Рассмотрим также пространство $\mathcal{Y}$, состоящее из всех наборов $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}$, плюс набор прямых (комплексных) $\ell_{ij} \subset \mathbb{C}^2$ — для каждой пары точек x_i, x_j, $i \neq j$, выбирается прямая, проходящая через две этих точки. Имеется очевидное отображение $\varrho : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ — забывание прямых. Обозначим $(\mathbb{C}^2)^{[n]}_* = \mathcal{HC}^{-1}(\pi(\mathcal{X}))$, где $\mathcal{HC} : (\mathbb{C}^2)^{[n]} \to (\mathbb{C}^2)^{(n)}$ — морфизм Чжоу, а $\pi : (\mathbb{C}^2)^n \to (\mathbb{C}^2)^{(n)}$ —

отображение факторизации. Иными словами, $(\mathbb{C}^2)^{[n]}_*$ — множество всех идеалов, в которых каждая точка имеет кратность не выше 2.

Аналогично теореме об устройстве $(\mathbb{C}^2)^{[2]}$ доказывается такое утверждение:

Предложение 2. *$(\mathbb{C}^2)^{[n]}_*$ представляет собой фактор $\mathcal{Y}$ по действию группы перестановок Σ_n.*

Рассмотрим теперь на пространстве $\mathbb{C}^2$ симплектическую форму $\Omega = dz_1 \wedge dw_1 + dz_2 \wedge dw_2$. Соответственно, симплектическая форма (мы ее также обозначим Ω) имеется и на $(\mathbb{C}^2)^n = \mathbb{C}^{2n}$: $\Omega = \sum_{i=1}^{2n}(dz_i \wedge dw_i)$. Пусть $\kappa = \varrho^*\Omega$ — 2-форма на Y. Форма κ (как и Ω) инвариантна относительно действия группы перестановок Σ_n; поэтому на $(\mathbb{C}^2)^{[n]}_* = Y/\Sigma_n$ имеется 2-форма ω, для которой $f^*\omega = \kappa$; здесь $f : Y \to (\mathbb{C}^2)^{[n]}_*$ — естественная проекция. Нетрудно видеть, что это та же самая форма ω, которую мы построили ранее. Отсюда вытекает замкнутость: $d\Omega = 0 \Rightarrow d\kappa = 0 \Rightarrow d\omega = 0$ □

На многообразии $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ действует группа параллельных переносов $\mathbb{C}^2$; она определяет представление $(\mathbb{C}^2)^{[n]} = \mathbb{C}^2 \times Q$, где Q — множество орбит; Q является гладким комплексным многообразием размерности $2n-2$. В модели ADHM это соответствует представлению $B_i = \operatorname{Id}\operatorname{Tr} B_i + B_i'$, где B_i' — оператор со следом нуль. Поскольку $\operatorname{Tr}((a\operatorname{Id} + X_1')(b\operatorname{Id} + Y_2')) = ab + \operatorname{Tr} X_1'Y_2'$, форма ω представляется в виде прямой суммы $\omega_1 \oplus \omega_2$ симплектических форм на $\mathbb{C}^2$ и Q.

Рассмотрим теперь отображение Чжоу $\mathcal{HC} : (\mathbb{C}^2)^{[n]} \to (\mathbb{C}^2)^{(n)}$, и пусть $M = \mathcal{HC}^{-1}(0, 0, \dots, 0)$ — множество идеалов, носитель которых сосредоточен в начале координат.

Пример 1. Пусть $n = 2$. Тогда $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ есть фактор пространства конфигураций $Y = \{(p_1, p_2, \ell) \mid p_1, p_2 \in \mathbb{C}^2, \ell$ — прямая в $\mathbb{C}^2, p_1, p_2 \in \ell\}$ по перестановке точек p_1, p_2. Множество M соответствует случаю $p_1 = p_2 = 0$, то есть представляет собой совокупность всех прямых, проходящих через начало координат. Таким образом, $M = \mathbb{C}P^1$.

Задача 2. Покажите, что в случае $n = 3$ множество M уже не является гладким многообразием.

Пусть теперь $\tilde{M} \subset M$ — множество гладких точек.

Теорема 2. *$\omega|_{\tilde{M}} = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим действие на $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ группы $G = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, заданное формулой $A_{t_1,t_2}(J) = \{p(t_1 z_1, t_2 z_2) \mid p \in J\}$. Пусть $P_1, \dots, P_r$ — образующие идеала J Действуя методом Гребнера, можно добиться, чтобы ведущие члены этих образующих (члены с наибольшей степенью z_1) были равны $z_1^{a_i} z_2^{b_i}$, где $a_1 > a_2 > \dots > a_r = 0$ и $0 = b_1 < b_2 < \dots < b_r$. Если теперь $t_1, t_2 \to \infty$ и $\lim_{t_1,t_2\to\infty} A(t_1,t_2)(J)$ существует, то он равен J_ν, где ν — диаграмма Юнга, "внешние углы" которой имеют координаты (a_i, b_i). Отсюда следует, что предельными точками множества $A(t_1,t_2)((\mathbb{C}^2)^{[n]})$ при $t_1, t_2 \to \infty$ являются только идеалы J_ν, т.е. неподвижные точки действия группы G.

Множество M инвариантно относительно действия G. Отсюда следует, что $\lim_{t_1,t_2\to\infty} A(t_1,t_2)(J) = J_\nu$, где $\nu \vdash n$ зависит от начальной точки J.

Тогда для произвольных векторов $p, q \in T_J\tilde{M}$ имеем $\lim_{t_1,t_2\to\infty} A(t_1,t_2)^*\omega(p.q) = \lim_{t_1,t_2\to\infty} \omega(A(t_1,t_2)'p, A(t_1,t_2)'q) = \omega(p_0, q_0)$, где $p_0, q_0 \in T_{J_\nu}\tilde{M}$ — некоторые касательные вектора. С другой стороны, в модели ADHM группа $G = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ действует так: $A(t_1,t_2)(B_1, B_2, v) = (t_1 B_1, t_2 B_2, v)$, откуда $A(t_1,t_2)^*\omega = t_1 t_2 \omega$. Тем самым конечный предел может существовать только если $\omega(p,q) = 0$. □

Упражнение. Докажите теорему 2 непосредственно, то есть докажите, что если векторы (X_1, X_2, u) и (Y_1, Y_2, v) касаются подмногообразия M в его гладкой части, то $\operatorname{Tr}(X_1 Y_2 - X_2 Y_1) = 0$.

Следствие 1. *$\dim \tilde{M} \le n - 1$.*

Доказательство. Размерность изотропного подмногообразия $\tilde{M} \subset Q$ не превышает половины размерности Q. □

На самом деле $\dim \tilde{M} = n - 1$. Для доказательства достаточно предъявить в $\tilde{M}$ семейство идеалов, запараметризованное $n-1$ параметрами $a_1, \dots, a_{n-1}$; в качестве такового можно взять идеалы, порожденные многочленами z_1^n и $z_2 - (a_1 z_1 + \dots + a_{n-1} z^{n-1})$.

Это утверждение имеет очевидное обобщение. Пусть X — произвольная комплексная поверхность. Тогда на $X^{(n)}$ имеется стратификация, страты которой занумерованы разбиениями $\nu \vdash n$: страт $S_\nu X$, где $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k)$, состоит из наборов из k различных точек с кратностями $\nu_1, \dots, \nu_k$.

Следствие 2. *Размерность гладкой части прообраза $\mathcal{HC}^{-1}(S_\nu)$ равна $n - k$.*

Форма ω, однако, не доказывает теорему 3 лекции 6, поскольку не является инвариантной относительно действия $\mathbb{T}^2$. Приведем без доказательств схему построения *вещественной* симплектической формы μ, обладающей этим свойством.

Рассмотрим пространство $S = \mathrm{Mat}(n \times n)^2 \times \mathrm{Mat}(n \times 1) \times \mathrm{Mat}(1 \times n)$ и определим на нем действие группы $\mathrm{GL}(n)$ формулой $g(B_1, B_2, v, \alpha) = (gB_1g^{-1}, gB_2g^{-1}, gv, \alpha g^{-1})$. Тогда имеет место такое утверждение:

Предложение 3. *Схему Гильберта $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ можно отождествить с множеством орбит унитарной группы $\mathrm{U}(n) \subset \mathrm{GL}(n)$ в подмножестве $R \subset S$, заданном уравнениями $[B_1, B_2]+v\alpha = 0$, $[B_1, B_1^*]+[B_2, B_2^*]+vv^*-\alpha^*\alpha = \mathrm{Id}$.*

Заметим, что уравнения выделяют в S подмножество, инвариантное относительно $\mathrm{U}(n)$, так что можно говорить о множестве орбит.

Пространство, касательное к S в произвольной точке, изоморфно самому S. Введем на S дифференциальную 2-форму Ω, значение которой в точке $B = (B_1, B_2, v, \alpha)$ на паре векторов (X_1, X_2, w, β) и (Y_1, Y_2, u, γ) равно $\mathrm{Tr}\, X_1Y_1^* - X_1^*Y_1 + X_2Y_2^* - X_2^*Y_2$. Ограничим форму Ω на подмножество $R \subset S$; при этом она, разумеется, станет вырожденной. Нетрудно убедиться, что Ω инвариантна относительно $\mathrm{U}(n)$. Следовательно, на множестве орбит группы в многообразии S — то есть, согласно предложению 3, на схеме Гильберта $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ — имеется 2-форма μ, для которой $\Omega|_Z = F^*\mu$, где $F : S \to (\mathbb{C}^2)^{[n]}$ — отображение факторизации.

Форма Ω замкнута и инвариантна относительно действия тора $\mathbb{T}^2$ — следовательно, этими свойствами обладает и форма μ. Невырожденность μ можно проверить непосредственно. На самом деле это частный случай общей конструкции — *симплектической редукции* многообразия (в данном случае M) по действию группы (в данном случае U), сохраняющему симплектическую структуру.