ЛЕКЦИЯ 8

Краткое содержание. Представление алгебры Клиффорда в гомологиях симметрических степеней и схем Гильберта точек.

Пусть $V = \bigoplus_{k=0}^N V_k$ — градуированное векторное пространство, наделенное суперсимметричной билинейной формой $(\cdot,\cdot)$. Суперсимметрия означает, что для любых элементов $u_1 \in V_{k_1}$, $u_2 \in V_{k_2}$ выполнено равенство $(u_2, u_1) = (-1)^{k_1k_2}(u_1, u_2)$. Алгеброй Клиффорда $\mathrm{Cl}(V)$ называется ассоциативная алгебра с единицей, порожденная элементами $u \in V$ и соотношениями $[u_1, u_2] \stackrel{\mathrm{def}}{=} u_1u_2 + (-1)^{k_1k_2}u_2u_1 = (u_1, u_2)1$ для всех $u_1 \in V_{k_1}$, $u_2 \in V_{k_2}$.

Дублем векторного пространства V с формой $(\cdot,\cdot)$ называется векторное пространство $\mathcal{D}(V) = V \oplus V$ с билинейной формой $(a, b)_{\mathcal{D}(V)} = (a', b')_{\mathcal{D}(V)} = 0$, $(a, b')_{\mathcal{D}(V)} = (a', b)_{\mathcal{D}(V)} = (a, b)$, где $a = (\alpha, 0)$, $a' = (0, \alpha)$ для некоторого $\alpha \in V$, и аналогично для b, b'.

Представление P алгебры $\mathrm{Cl}(V)$ в пространстве H это, по определению, набор операторов P_u, $u \in V$, для которых $[P_{u_1}, P_{u_2}] = P_{u_1}P_{u_2} - (-1)^{k_1k_2}P_{u_2}P_{u_1} = (u_1, u_2)\,\mathrm{id}$. В частности, представление алгебры $\mathrm{Cl}(\mathcal{D}(V))$ это набор операторов P_u, P_u^+, $u \in V$, с соотношениями $[P_{u_1}, P_{u_2}] = 0 = [P_{u_1}^+, P_{u_2}^+]$ и $[P_{u_1}, P_{u_2}^+] = [P_{u_1}^+, P_{u_2}] = (u_1, u_2)\,\mathrm{id}$. У алгебры $\mathrm{Cl}(\mathcal{D}(V))$ имеется выделенное бесконечномерное представление $\mathcal{F}_V$ (представление Фока). В этом представлении имеется “старший” (или “вакуумный”) вектор v, для которого $P_u^+v = 0$ для всех u, и на который все операторы P_u действуют свободно. Тем самым если $u_1, \dots, u_N$ — градуированный базис в пространстве V ($u_i \in V_{k_i}$), базисом в представлении $\mathcal{F}_V$ (как векторном пространстве) является множество всех векторов вида $P_{u_{i_1}} \dots P_{u_{i_d}}v$ для всевозможных d и таких наборов $i_1, \dots, i_d$, в которых всякое число $s \in \{1, \dots, N\}$ может появляться лишь однажды, если k_s нечетно, и произвольное количество раз, если k_s четно. Если на пространстве $\mathcal{F}_V$ ввести градуировку, считая что $\deg P_{u_{i_1}} \dots P_{u_{i_d}}v = k_{i_1} + \dots + k_{i_d}$, то имеет место очевидная формула

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \dim\{x \in \mathcal{F}_V \mid \deg x = n\} = \frac{\prod_{m=0}^{\infty}(1 + q^{2m+1})^{\dim V_{2m+1}}}{\prod_{m=0}^{\infty}(1 - q^{2m})^{\dim V_{2m}}} \tag{1}$$

Пример 1. Пусть $V = \mathbb{C}^n$ — четное пространство, и $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис. Тогда представление алгебры $\mathrm{Cl}(\mathcal{D}(V))$ это набор операторов $q_1, \dots, q_n$ и $p_1, \dots, p_n$, для которых $q_ip_j - p_jq_i = \delta_{ij}\,\mathrm{id}$. Представление Фока можно реализовать в пространстве многочленов $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, полагая $(q_if)(x_1, \dots, x_n) = x_if(x_1, \dots, x_n)$ и $(p_if)(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$.

Пусть теперь X — гладкое компактное ориентированное многообразие размерности N, и пусть $V = \bigoplus_{k=0}^N H_k(X)$ — векторное пространство его $\mathbb{R}$-гомологий. На пространстве V имеется суперсимметричная билинейная форма — индекс пересечения циклов (если сумма размерностей циклов a и b не равна N, то $(a, b) = 0$ по определению). Наша цель — построить в пространстве $\mathcal{H} \bigoplus_{k,n=0}^{\infty} H_k(X^{(n)})$ представление алгебры $\mathrm{Cl}(\mathcal{D}(V))$.

Пусть $\alpha \in H_i(X)$ и $Z \in H_k(X^{(n)})$. Рассмотрим в пространстве $X^{(n)} \times X^{(n+1)}$ цикл R_α, точками которого являются пары (x, x') такие, что $x \subset x'$, и (единственная) точка $x' \setminus x$ принадлежит циклу α (нетрудно проверить, что это определение корректно — замена цикла α на гомологичный ведет к такой же замене для R_α). Кроме того, обозначим $Z_1 = Z \times X^{(n+1)}$ — цикл в том же пространстве $X^{(n)} \times X^{(n+1)}$. Положим теперь по определению $P_\alpha(Z) = (p_2)_*(Z_1 \cap R_\alpha)$; здесь $p_2 : X^{(n)} \times X^{(n+1)} \to X^{(n+1)}$ — проекция прямого произведения на второй сомножитель. Аналогично, положим $P_\alpha^+(Z) = (p_1)_*(Z_2 \cap R_\alpha)$, где Z — цикл в $X^{(n+1)}$, $Z_2 = X^{(n)} \times Z$, p_1 — проекция на первый сомножитель.

Неформально говоря, если класс α представлен гладким ориентированным i-мерным подмногообразием в X, а Z — стратифицированным подмногообразием в $X^{(n)}$ (страты которого — подмногообразия в стандартных стратах пространства $X^{(n)}$), то в качестве представителя класса $P_\alpha(Z) \in H_{k+i}(X^{(n+1)})$ возьмем (стратифицированное) многообразие $\{z \cup \{a\} \mid z \in Z, a \in \alpha\}$; здесь под $z \cup \{a\}$ подразумевается, что к неупорядоченному набору точек $z \in Z \subset X^{(n)}$ мы добавляем точку a (если она там уже присутствует, то увеличиваем ее кратность на 1). Для описания оператора P_α^+ обозначим для произвольного $x \in X$ и $Z \subset X^{(n)}$ символом $\mathcal{I}_x(Z)$ множество наборов $\{z \in Z\}$, в которые входит с ненулевой кратностью точка x. Тогда представителем класса $P_\alpha^+(Z) \in H_{k+i-N}(X^{(n-1)})$ является множество $\bigcup_{a\in\alpha}\{z \setminus \{a\} \mid z \in \mathcal{I}_a\}$. Определение ориентации на (стратифицированных) многообразиях $P_\alpha(Z)$ и $P_\alpha^+(Z)$ — упражнение.

Теорема 1. *Операторы P_α, P_α^+ определяют в пространстве $\mathcal{H} = \bigoplus_{k,n=0}^{\infty} H_k(X^{(n)})$ представление алгебры $\mathrm{Cl}(\mathcal{D}(H_*(X)))$, изоморфное представлению Фока.*

Доказательство. Равенства $[P_\alpha, P_\beta] = 0$ и $[P_\alpha^+, P_\beta^+] = 0$ очевидны (обратите, однако, внимание на знак !). Пусть теперь α и β — циклы размерностей k и l; рассмотрим три случая.

1. *Случай 1: $k+l < N$.* Тогда циклы α и β можно реализовать (с точностью до множителя) непересекающимися гладкими многообразиями. В этом случае носители циклов $P_\alpha P_\beta^+(Z)$ и $P_\beta^+ P_\alpha(Z)$ одинаковы и равны $\bigcup_{a\in\alpha}\bigcup_{b\in\beta}\{z \cup \{a\} \setminus \{b\} \mid z \in \mathcal{I}_b(Z)\}$; сравнение ориентаций показывает, что $[P_\alpha, P_\beta^+](Z) = 0$.

2. *Случай 2: $k+l = N$.* Реализуем α и β (с точностью до множителя) гладкими многообразиями, трансверсально пересекающимися в конечном числе точек $s_1, \dots, s_m$, со знаками $\sigma_1, \dots, \sigma_m$. Тогда $[P_\alpha, P_\beta^+](Z) = \sum_{i=1}^m \sigma_i Z = \langle \alpha, \beta\rangle Z$.

3. *Случай 3: $k+l > N$.* Реализуем α и β (с точностью до множителя) гладкими многообразиями, трансверсально пересекающимися по подмногообразию размерности $k+l-N > 0$. Тогда $[P_\alpha, P_\beta^+](Z)$ — цикл размерности $\dim Z + k + l - N$, носитель которого, однако, лежит в носителе цикла Z. Такой цикл обязательно гомологичен нулю, откуда $[P_\alpha, P_\beta^+](Z) = 0$.

Таким образом, операторы P_α и P_α^+ порождают представление алгебры $\mathrm{Cl}(\mathcal{D}(H_*(X)))$. Сравнивая формулу (1) с формулой Макдональда для размерности когомологий симметрических степеней, получим, что представление совпадает с $\mathcal{H}$. $\square$

Пространством петель (приведенных, алгебраических) пространства V называется пространство $V^{S^1} \stackrel{\mathrm{def}}{=} V \otimes \mathbb{C}_0[t, t^{-1}]$, где $\mathbb{C}_0[t, t^{-1}]$ — многочлены Лорана с нулевым свободным членом. Билинейная форма в пространстве петель определяется равенством $(\alpha \otimes t^i, \beta \otimes t^j) = i\delta_{i+j}(\alpha, \beta)$. Представление алгебры $\mathrm{Cl}(V^{S^1})$ является набор операторов $P_{u,i}$, $u \in V$, $i \in \mathbb{Z}$, с соотношениями $[P_{u_1,i}, P_{u_2,j}] = 0$ при $i+j \neq 0$, и $[P_{u_1,i}, P_{u_2,-i}] = i(u_1, u_2)\,\mathrm{id}$. Представление Фока $\mathcal{F}$ это представление алгебры $\mathrm{Cl}(V^{S^1})$, порожденное старшим вектором v, на который операторы $P_{u,i}$ при всех u и при всех $i < 0$ действуют нулем, а операторы $P_{u,i}$ с $i > 0$ — свободно.

Пример 2. Представление Фока алгебры $\mathrm{Cl}(V^{S^1})$, где V — одномерное пространство (с ненулевой билинейной формой) можно реализовать в пространстве многочленов $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \dots]$ от бесконечного числа переменных; здесь P_i при $i > 0$ — оператор умножения на x_i, а $P_{-i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Пусть Λ_N — пространство симметрических функций от N переменных. Имеется естественная проекция $\varphi_N : \Lambda_N \to \Lambda_{N-1}$ — подстановка $x_N = 0$. Объединение $\bigsqcup_N \Lambda_N$, в котором мы отождествим $z \sim \varphi_N(z)$ для всех N и всех $z \in \Lambda_N$ (иными словами, проективный предел Λ_N), обозначается Λ и называется пространством симметрических функций от бесконечного (лучше сказать, неопределенного) числа переменных.

Всякий симметрический многочлен однозначно представим как многочлен от переменных $p_i(x) = \sum_s x_s^i$. Определим в Λ оператор P_i при $i > 0$ как оператор умножения на p_i, а оператор P_{-i} — как оператор дифференцирования по p_i. Тогда Λ превращается в представление Фока алгебры $\mathrm{Cl}(V^{S^1})$, где $V = \mathbb{C}$ — одномерное пространство с ненулевой билинейной формой (такая форма только одна с точностью до множителя).

Пусть теперь X — компактная гладкая комплексная поверхность, и $\alpha \in H_m(X)$. Определим оператор $P_{\alpha,i} : H_k(X^{[n]}) \to H_{k+m+2i-2}(X^{[n+i]})$ следующим образом. Если $i > 0$ и Z — k-мерный цикл в $X^{[n]}$, то $P_{\alpha,i}(Z) = \{J' \mid \exists J \in Z, a \in \alpha : J' \subset J, \operatorname{supp} J/J' = i(a)\}$; для $i < 0$ — аналогично, со сменой знака включения. Комплексная размерность слоя отображения Чжоу над "самым глубоким" стратом пространства $X^{(i)}$ равна $i-1$, откуда вытекает, что $P_{\alpha,i}(Z)$ — цикл размерности (вещественной !) $k+m+2i-2$.

Теорема 2. *Операторы $P_{\alpha,i}$ образуют в пространстве $\bigoplus_{k,n=0}^{\infty} H_k(X^{[n]})$ представление алгебры $\mathrm{Cl}(H_*(X)^{S^1})$, изоморфное представлению Фока.*

Доказательство теоремы похоже на доказательство теоремы 1. Вначале по соображениям размерности заключаем, что $[P_{\alpha,i}, P_{\beta,j}] = 0$ если $i+j \neq 0$, а также $[P_{\alpha,i}, P_{\beta,-i}] = 0$ при $\dim\alpha + \dim\beta \neq 4 = \dim X$. Рассмотрим теперь коммутатор $[P_{\alpha,i}, P_{\beta,-i}]$ при $\dim\alpha + \dim\beta = 4$. Реализуем циклы α и β гладкими многообразиями дополнительной размерности, трансверсально пересекающимися в конечном числе точек. Вклад каждой такой точки равен ее знаку, умноженному на индекс пересечения циклов $M_{i,\dim\alpha}$ и $M_{i,\dim\beta} = M_{i,4-\dim\alpha}$. Здесь под $M_{i,k}$ имеется в виду цикл в $(\mathbb{C}^2)^{[i]}$, образованный всеми идеалами, носитель которых — единственная точка, лежащая в подпространстве $L \subset \mathbb{C}^2$ вещественной размерности k. Можно показать (это теорема Эллингсруда–Стремме), что индекс пересечения $M_{i,k}$ и $M_{i,4-k}$ не зависит от k и равен i. Таким образом, действительно получается представление алгебры $\mathrm{Cl}(H_*(X)^{S_1})$; из формулы Геттше вытекает, что это представление изоморфно представлению Фока.