ЛЕКЦИЯ 9

Краткое содержание. Свойства и геометрический смысл алгебры диагональных гармоник.

Обозначим $R_n = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ алгебру многочленов на множестве $(\mathbb{C}^2)^n$. На этом множестве — а, следовательно, и на алгебре R_n — действует (перестановками точек) симметрическая группа Σ_n. Рассмотрим пространство $R_0^{\Sigma_n} \subset R_n$ инвариантных многочленов, равных нулю в начале координат, и натянем на него идеал, который обозначим I_n. В качестве системы образующих идеала I_n можно взять, например, многочлены $p_{a,b}(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i^a y_i^b$ при $a, b = 0, \dots, n-1$, $(a,b) \neq (0,0)$. Эти многочлены однородны по x и по y, откуда вытекает, что факторалгебра $H_n = R_n/I_n$ биградуирована: $H_n = \bigoplus_{k,l} H_{kl}^{(n)}$, где $H_{kl}^{(n)}$ состоит из бИоднородных многочленов степени k по x и степени l по y. Алгебра H_n называется алгеброй диагональных гармоник.

Обозначим $h_{kl}^{(n)} = \dim H_{kl}^{(n)}$. Оказывается, что числа $h_{kl}^{(n)}$ удовлетворяют некоторым комбинаторным соотношениям.

Рассмотрим множество T_n деревьев (связных графов без циклов) с $n+1$ вершинами, которые пронумерованы числами $0, 1, \dots, n$ (и графы, отличающиеся только нумерацией вершин, считаем различными). Говорят, что пара вершин i, j графа образует инверсию, если $j > i > 0$ и всякий путь, соединяющий вершину i с вершиной 0 ("корнем" дерева), проходит через вершину j. Очевидно, количество инверсий в дереве меняется от 0 до $n(n-1)/2$.

Предложение 1. *Общее число деревьев описанного вида равно $(n+1)^{n-1}$. Количество деревьев, не имеющих инверсий ("монотонных") равно $n!$.*

Доказательство. Сопоставим каждому дереву $\tau \in T_n$ последовательность чисел $b(\tau) = (b_1, \dots, b_{n-1})$ следующим образом. Дерево τ имеет по крайней мере одну висячую вершину (вершину, в которую входит только одно ребро, и отличную от корня 0). Рассмотрим все такие вершины, и выберем из них вершину a с наибольшим номером. Единственное ребро ведет из этой вершины в другую, номер которой мы примем за b_1. Затем удалим из дерева вершину a вместе с входящим в нее ребром — получится новое дерево (правда, вершины его пронумерованы уже, вообще говоря, не подряд); применим к нему ту же самую процедуру и получим число b_2, и т.д. После $n-1$ шагов останется дерево, состоящее из вершины 0 и еще одной вершины; в этот момент процесс прекратим.

Нетрудно видеть, что дерево τ однозначно восстанавливается из последовательности $b(\tau)$. Действительно, номера висячих вершин дерева это в точности числа $a \in \{1, 2, \dots, n\}$, которые *не* встречаются в последовательности (такие числа существуют, поскольку в последовательности $n-1 < n$ членов). Самое большое из этих чисел (обозначим его a) — номер вершины, соединенной ребром с вершиной b_1. Если эту вершину удалить, то получится дерево τ', вершины которого пронумерованы числами $0, 1, \dots, \widehat{a}, \dots, n$ ("шляпка" означает пропуск элемента) и которому соответствует последовательность $b(\tau') = (b_2, \dots, b_{n-1})$. Индукция по n позволяет считать, что дерево τ' восстанавливается однозначно — следовательно, однозначно восстанавливается и дерево τ.

Таким образом, число деревьев равно числу всевозможных последовательностей длины $n-1$ из чисел $0, 1, \dots, n$, то есть $(n+1)^{n-1}$. Нетрудно видеть, что дерево τ монотонно тогда и только тогда, когда $0 \le b_i \le n - i$ для каждого $i = 1, \dots, n-1$. Поэтому число монотонных деревьев равно $n!$. $\square$

Теорема 1 (М.Хайман). (1) *$h_{kl}^{(n)} > 0$ тогда и только тогда, когда $k + l \le n(n-1)/2$.*

(2) *$h_{kl}^{(n)} = 1$ при $k + l = n(n-1)/2$.*

(3) *Число $u_k^{(n)} = \sum_{l=0}^{n(n-1)/2} h_{kl}^{(n)}$ равно количеству деревьев с ровно k инверсиями.*

(4) *Число $v_i^{(n)} = \sum_{k-l=i} h_{kl}^{(n)}$ равно коэффициенту при q^i в выражении $q^{-n(n-1)/2}(1 + q + \dots + q^n)^{n-1}$.*

Если забыть одну из двух градуировок и представить H_n как градуированную алгебру: $H_n = \bigoplus_k A_k^{(n)}$, то $u_k^{(n)}$ это размерность компоненты $A_k^{(n)}$.

Следствие 1.1. *Общая размерность алгебры H_n равна $(n+1)^{n-1}$.*

Заметим, что следствие 1.1 вытекает как из утверждения 3 (и предложения 1), так и из утверждения 4.

Поскольку идеал I_n инвариантен относительно действия симметрической группы Σ_n, в H_n возникает ее представление. Его можно описать в иных терминах. Рассмотрим абелеву группу (решетку) $L = \mathbb{Z}^n$ и в ней подгруппу M, порожденную векторами $(x_1,\dots,x_n)$, в которых все числа делятся на $n+1$, и вектором $(1,1,\dots,1)$. На факторгруппе L/M действует перестановками группа Σ_n. Рассмотрим векторное пространство размерности $(n+1)^{n-1} = \#(L/M)$ с базисом, векторы которого занумерованы элементами L/M. В таком пространстве естественно возникает представление группы Σ_n; обозначим его A.

Теорема 1 (продолжение). (5) *Представление группы Σ_n в пространстве H_n изоморфно представлению A, тензорно умноженному на знакопеременное представление.*

Из этого утверждения также вытекает следствие 1.1.

Полное доказательство теоремы 1 лежит за пределами нашего курса. Некоторые частные случаи, однако, доказать можно. Например, свойство 3 при $k=0$ означает (в силу второго утверждения предложения 1), что $\dim A_0^{(n)} = \sum_l h_{0l}^{(n)} = n!$. Нетрудно видеть, что $A_0^{(n)}$ представляет собой фактор пространства $R_{n,x}$ многочленов, зависящих только от $x_1,\dots,x_n$, по пересечению $R_{n,x}\cap I_n$. Очевидно, $R_{n,x} = \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$, а $R_{n,x}\cap I_n$ — идеал, порожденный симметрическими многочленами, равными нулю в начале координат. Равенство $\dim R_{n,x}/(R_{n,x}\cap I_n)$ вытекает из теоремы Шевалле и уже было доказано в лекции 2.

Докажем свойство 1. Обозначим $h_k(x_1,\dots,x_s)$ симметрическую функцию, равную сумме всех мономов от переменных $x_1,\dots,x_s$ общей степени k.

Предложение 2. *$h_k(x_k,\dots,x_n)\in I_n$ при всяком $k=1,\dots,n$.*

Доказательство. Пусть $e_k(x_1,\dots,x_n)$ — элементарная симметрическая функция степени k. Тогда $\prod_{i=1}^n(1+tx_i) = \sum_{j=0}^n t^j e_j(x_1,\dots,x_n)$, откуда следует, что $\prod_{i=1}^n(1+tx_i)\equiv 1 \mod I_n$. Таким образом, $\prod_{i=1}^{k-1}(1+tx_i)\equiv\prod_{i=k}^n\frac{1}{1+tx_i} \mod I_n$. Правая часть этого равенства равна $\sum_{j=0}^\infty(-1)^j t^j h_j(x_k,\dots,x_n)$. Левая часть не содержит члена t^k, поэтому коэффициент при t^k в правой части должен принадлежать I_n. Этот коэффициент равен $h_k(x_k,\dots,x_n)$ с точностью до знака. □

Следствие 1.1. *При любых $k=1,\dots,n$ и любых p,q таких, что $p+q=k$, коэффициент $a_{p,q}$ при $t^p s^q$ многочлена $h_k(tx_k+sy_k,\dots,tx_n+sy_n)$ принадлежит I_n.*

Следствие вытекает из того очевидного факта, что если N — произвольная матрица 2×2, и многочлен $P(x_1,y_1,\dots,x_n,y_n)$ принадлежит идеалу I_n, то этому идеалу принадлежит и многочлен $P(N(x_1,y_1),\dots,N(x_n,y_n))$.

Многочлен $a_{p,q}$ содержит моном $x_k^p y_k^q$, а в остальных мономах этого многочлена содержится либо переменная x_i с $i>k$, либо моном имеет вид $x_k y_i$, $i>k$. Поэтому по модулю идеала I_n всегда можно заменить любой моном $x_k^p y_k^q$ общей степени k комбинацией мономов, содержащих переменные с бóльшими номерами. Тем самым, каждый многочлен эквивалентен по модулю I_n комбинации мономов, в которых общая степень по переменным x_k и y_k не превосходит $k-1$. Отсюда вытекает, что все однородные многочлены общей степенью больше $1+2+\dots+(n-1) = n(n-1)/2$ принадлежат I_n.

Пусть теперь $I\subset R_n$ — идеал, инвариантный относительно действия группы Σ_n. Тогда на факторпространстве R_n/I возникает представление Σ_n. Обозначим $\mathcal{S}_n$ множество тех идеалов, для которых это представление — регулярное (тем самым если $I\in\mathcal{S}_n$, то $\operatorname{codim} I = n!$).

Предложение 3. *Множество $\mathcal{S}_n$ изоморфно, как комплексное многообразие, схеме Гильберта $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$.*

Полное доказательство этого утверждения весьма сложно, и мы его не приводим. Мы построим, однако, отображение $\varphi:\mathcal{S}_n\to(\mathbb{C}^2)^{[n]}$, которое на самом деле является взаимно однозначным (но доказать этого мы не сможем). Для идеала $I\subset\mathcal{S}_n$ общего положения конструкция $\varphi(I)$ практически очевидна: рассмотрим носитель $\operatorname{supp} I = \{z\in(\mathbb{C}^2)^n \mid f(z)=0\,\forall f\in I\}\subset(\mathbb{C}^2)^n$. Он инвариантен относительно действия симметрической группы, и в общем положении состоит из точки $(p_1,\dots,p_n)\in(\mathbb{C}^2)^n$, где $p_i\ne p_j$ при $i\ne j$, и всех ее перестановок вида $(p_{\sigma(1)},\dots,p_{\sigma(n)})$, $\sigma\in\Sigma_n$. В этом случае положим $\varphi(I) = \{f\in\mathbb{C}[z_1,z_2]\mid f(p_1)=\dots=f(p_n)=0\}$.

В общем случае положим $\varphi(I) = I\cap\mathbb{C}[x_1,y_1]\subset\mathbb{C}[x_1,y_1]$ и докажем, что $\dim(\mathbb{C}[x_1,y_1]/\varphi(I)) = n$. Рассмотрим на R_n/I действие группы Σ_{n-1}, реализованной как подгруппа Σ_n, оставляющая на месте x_1,y_1. Тогда, как нетрудно видеть, пространство инвариантов $(R_n/I)^{\Sigma_{n-1}}$ порождено x_1,y_1 и инвариантными функциями от $x_2,y_2,\dots,x_n,y_n$ — достаточно взять функции $p'_{a,b}(x,y) = \sum_{i=2}^n x_i^a y_i^b$. Поскольку функции $p_{a,b}(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i^a y_i^b = x_1^a + y_1^b + p'_{a,b}(x,y)$ — инварианты, а регулярное представление R_n/I содержит только одномерное пространство инвариантов, порожденное константами, имеем $p_{a,b}\equiv c_{a,b} \mod I$ для некоторых констант $c_{a,b}$, откуда вытекает, что $p'_{a,b}\equiv c_{a,b} - x_1^a y_1^b$. Тем самым, пространство $(R_n/I)^{\Sigma_{n-1}}$ порождено функциями от x_1,y_1, и, следовательно, $\mathbb{C}[x_1,y_1]/\varphi(I) = (R_n/I)^{\Sigma_{n-1}}$. Но $\dim(R_n/I)^{\Sigma_{n-1}} = n$, поскольку представление регулярное.

Предложение 3 позволяет построить на $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ расслоение X_n ранга $n!$, на слоях которого действует группа Σ_n, причем каждый слой является регулярным представлением: слоем над идеалом $J\in(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ является пространство $R_n/\varphi^{-1}(J)$. Это позволяет выяснить геометрический смысл алгебры H_n:

Предложение 4. *Пространство H_n как модуль над кольцом инвариантов $R_n^{\Sigma_n}$ и как представление группы Σ_n изоморфно модулю сечений расслоения X_n, ограниченного на подмножество $(\mathbb{C}^2)_0^{[n]} = \mathcal{HC}^{-1}(0, 0, \ldots, 0) \subset (\mathbb{C}^2)^{[n]}$.*

Всякий многочлен $P \in R_n$ определяет сечение расслоения $X_n|_{(\mathbb{C}^2)_0^{[n]}}$. Пусть теперь $P \in R_n^{\Sigma_n}$, и $P(0) = 0$ (то есть P — одна из образующих идеала I_n), и пусть $J \in (\mathbb{C}^2)_0^{[n]}$. носитель идеала $\varphi(J) \subset R_n$ сосредоточен в начале координат в $(\mathbb{C}^2)^n$. Элемент $P \in R_n/\varphi(J)$ — инвариант, поэтому $P \equiv c \mod \varphi(I)$ для некоторой константы c. Носитель идеала $\varphi(J) \subset R_n$ сосредоточен в начале координат в $(\mathbb{C}^2)^n$, откуда следует, что $c = P(0) = 0/$ Иными словами, $P \in \varphi(J)$, что означает, что сечение расслоения $X_n|_{(\mathbb{C}^2)_0^{[n]}}$, задаваемое P — нулевое. Тем самым определено отображение модуля R_n/I_n в модуль сечений $X_n|_{(\mathbb{C}^2)_0^{[n]}}$; нетрудно видеть, что оно Σ_n-эквивариантно (является гомоморфизмом представлений симметрической группы). Предложение 4 (доказательство его мы не приводим) утверждает, что это отображение — изоморфизм.

Предложение 4 позволяет доказать теорему 1 геометрическими методами.