ЗАДАЧИ И ТЕМЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

Задача 1. Докажите, что кольцо когомологий многообразия полных флагов в $\mathbb{C}^n$ действительно порождено классами $x_1 = c_1(L_1), \dots, x_n = c_1(L_n)$, где L_k — линейное расслоение, слой которого над флагом $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{C}^n$ равен V_k/V_{k-1}. Выразите через $x_1, \dots, x_n$ классы когомологий, соответствующие клеткам Шуберта.

Литература: Бернштейн, Гельфанд, Гельфанд. УМН (1973), N3.

Задача 2. Докажите формулу Геттше для $X = \mathbb{C}P^2$ с помощью теории Морса (аналогично формуле Геттше для $X = \mathbb{C}^2$).

Задача 3. Покажите, что прообраз точки $3(0)$ при отображении Чжоу $(\mathbb{C}^2)^{[3]} \to (\mathbb{C}^2)^{(3)}$ не является гладким многообразием. Опишите этот прообраз явно.

Задача 4. Вещественный аналог теоремы о том, что индекс отображения равен размерности локальной алгебры.

Литература: Арнольд, Варченко, Гусейн-Заде. Особенности дифференцируемых отображений, параграф “Локальная кратность голоморфного отображения”.

Задача 5. Формула Геттше через кольцо Гротендика.

Литература: Гусейн-Заде, Луэнго, Мелле-Эрнандес. arxiv.org/0407204.

Задача 6. Вычислить размерность касательного пространства к $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ в неподвижной точке действия $(\mathbb{C}^*)^2$. Вывести отсюда теорему Фогарти о гладкости. Показать, что $(\mathbb{C}^3)^{[n]}$ негладко при $n \geq 3$.

Задача 7. Вычисление константы в соотношениях Накаджимы через вертексные операторы.

Литература: H.Nakajima, Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces. или G.Ellingsrud. Hilbert schemes of points and Heisenberg algebras.