Топологические пространства

Рекомендуемая литература по топологии.

(1) Келли Дж. Общая топология.
(2) Милнор Дж. Теория Морса.
(3) Постников М. Лекции по алгебраической топологии. Основы теории гомотопий.
(4) Постников М. Лекции по алгебраической топологии. Теория гомотопий клеточных пространств.
(5) Рохлин В., Фукс Д. Начальный курс топологии. Геометрические главы.
(6) Спеньер Э. Алгебраическая топология.
(7) Фоменко А., Фукс Д. Курс гомотопической топологии.
(8) Фукс Д., Фоменко А., Гутенмахер В. Гомотопическая топология.

Часть 1. Топологические пространства

Определение 1.1. Топологическое пространство — это множество X с выделенным классом подмножеств, называемых открытыми подмножествами, удовлетворяющим свойствам:

- **О1:** все X и пустое множество $\emptyset$ открыты;
- **О2:** объединение *любого* числа открытых подмножеств открыто;
- **О3:** пересечение *конечного* числа открытых подмножеств открыто.

Примеры 1.2. (1) X — вещественная прямая $\mathbb{R}$ (варианты: отрезок, интервал, луч, …вообще, любая область в $\mathbb{R}^n$); подмножество открыто, если вместе с каждой точкой содержит шар достаточно маленького радиуса с центром в этой точке.
(2) X — любое множество, всякое подмножество открыто (дискретная топология).
(3) X — любое множество, открытые подмножества — только $\emptyset$ и все X (тривиальная топология).

Подмножество $Z \subset X$ называется замкнутым, если его дополнение $X \setminus Z$ — открыто.

Лемма 1.3. *Замкнутые подмножества в топологическом пространстве обладают свойствами:*

- **З1:** все X и пустое множество $\emptyset$ замкнуты;
- **З2:** пересечение *любого* числа замкнутых подмножеств замкнуто;
- **З3:** объединение *конечного* числа замкнутых подмножеств замкнуто.

Доказательство: $X \setminus X = \emptyset$, $X \setminus \emptyset = X$, $X \setminus (\cap Z_\alpha) = \cup(X \setminus Z_\alpha)$, $X \setminus (\cup_{i=1}^n Z_i) = \cap_{i=1}^n (X \setminus Z_i)$. □

Ясно, что если выбрать произвольный класс замкнутых подмножеств в X, удовлетворяющий свойствам З1–З3, и определить открытые подмножества как дополнения до замкнутых, то аксиомы О1–О3 будут выполняться. Это дает еще один способ задавать топологию на множестве.

Замыканием подмножества $Y \subset X$ называется пересечение всех замкнутых подмножеств в X, содержащих Y. Внутренностью подмножества $Y \subset X$ называется объединение всех открытых подмножеств в X, содержащихся в Y. Замыкание обозначается $\overline{Y}$, а внутренность $\operatorname{Int} Y$.

Всякое открытое подмножество в X, содержащее точку $x \in X$, называется ее окрестностью. Точка $x \in X$ называется предельной точкой подмножества $Y \subset X$, если всякая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку множества $Y \setminus \{ x \}$. Точка x называется предельной точкой последовательности $(x_i)_{i=1}^\infty$, если всякая окрестность точки x содержит *бесконечное* число членов последовательности. Точка x называется пределом последовательности $(x_i)_{i=1}^\infty$, если всякая окрестность точки x содержит *почти все* (то есть все кроме конечного числа) члены последовательности. В этом случае пишут $x = \lim x_i$ и говорят, что последовательность $(x_i)_{i=1}^\infty$ сходится к x.

Базой топологии называют класс открытых множеств, такой что всякое открытое множество является объединением множеств из этого класса. Предбазой топологии называют класса открытых множеств, такой что всякое открытое множество является объединением конечных пересечений множеств из этого класса. Топологию на множестве X можно задавать не только указывая класс открытых (или замкнутых) множеств. Вместо этого, достаточно указать базу топологии, предбазу топологии, или операцию замыкания.

Определение 1.4. Отображение топологических пространств — непрерывно, если прообраз всякого открытого подмножества открыт. Множество непрерывных отображений из X в Y обозначается $C(X, Y)$.

Напомним, что категория $\mathcal{C}$ — это следующие данные: 1) класс объектов $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$; 2) для каждой пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ — множество морфизмов $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$; и 3) закон композиции, то есть отображение $\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$, $(g, f) \mapsto g \circ f$, такие что выполняются свойства:

- **K1:** Ассоциативность: для любой четверки объектов $X, Y, Z, W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ и любой тройки морфизмов морфизмов $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$ имеем $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
- **K2:** Тождественный морфизм: для любого объекта $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ существует морфизм $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, т.ч. для любого $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ и морфизмов $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ имеем $f \circ \mathrm{Id}_X = f$, $\mathrm{Id}_X \circ g = g$.

Морфизм $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ называется изоморфизмом, если $\exists g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, так что $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$, $g \circ f = \mathrm{Id}_X$.

Категорией топологических пространств называется категория, в которой 1) объекты = топологические пространства; 2) морфизмы из X в $Y = C(X, Y)$; 3) композиция — естественная.

Изоморфизмы в категории топологических пространств, называются гомеоморфизмами. Таким образом, гомеоморфизм — это взаимно-однозначное отображение f, такое что и f и f^{-1} непрерывны.

Пример 1.5. Круг гомеоморфен квадрату, но не гомеоморфен отрезку.

В топологии часто рассматривают категорию топлогических пространств с отмеченной точкой: ее объекты — это пары (X, x_0), где X — топологическое пространство и $x_0 \in X$, а морфизмы — непрерывные отображения, переводящие отмеченную точку в отмеченную точку.

Определение 1.6. Пространство Xназвается

- связным, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых подмножеств;
- линейно связным, если $\forall x, y \in X$ $\exists f \in C([0, 1], X)$, так что $f(0) = x$, $f(1) = y$;
- компактным, если из всякого покрытия X открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

В большинстве случаев мы будем предполагать, что рассматриваемые топологические пространства обладают рядом «хороших» свойств, таких как

(1) первая аксиома счетности: у каждой точки есть счетное множество окрестностей, так что всякая окрестность этой точки содержит одну из них;
(2) вторая аксиома счетности: топология обладает счетной базой;
(3) хаусдорфовость: любые две точки имеют непересекающиеся окрестности;
(4) локальная связность: всякая точка имеет сколь угодно малую связную окрестность;
(5) локальная линейная связность: всякая точка имеет сколь угодно малую линейно связную окрестность;
(6) локальная компактность: всякая точка имеет окрестность, замыкание которой компактно.

Для «хороших» топологических пространств выполняется ряд полезных утверждений, например, *непрерывное взаимно однозначное отображение из компактного пространства в хаусдорфово является гомеоморфизмом* или *всякое компактное подмножество замкнуто.* Мы не будем их доказывать, и даже приводить список таких утверждений, а просто будем ими пользоваться по мере надобности. С такими утверждениями можно ознакомиться по любому учебнику общей топологии.

Часть 2. Важнейшие топологические пространства

Пусть X — топологическое пространство, а $Y \subset X$ — подмножество. Индуцированной топологией на Y называется топология, в которой открытыми являются пересечения с Y открытых подмножеств в X.

Пусть X — топологическое пространство, $\sim$ — отношение эквивалентности на нем, а $Y = X/\sim$ — множество классов эквивалентности. Фактортопологией на Y называется топология, в которой открытыми являются такие подмножества в Y, чьи прообразы относительно естественной проекции $X \to Y$ открыты.

Пусть X, Y — топологические пространства. Несвязное объединение $X \sqcup Y$ наделяется топологией, в которой открытыми множествами являются множества $U \sqcup V$, где U открыто в X, а V открыто в Y.

Пусть X, Y — топологические пространства. Топологией произведения на $X \times Y$ называется топология, базой которой является множество произведений $U \times V$, где U открыто в X, а V открыто в Y.

(1) Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с базой топологии $U_{(x_1,\dots,x_n),\varepsilon} = \{\,(y_1,\dots,y_n) \mid \sum (y_i - x_i)^2 < \varepsilon^2\,\}$.
(2) Комплексное $\mathbb{C}^n$ и кватернионное $\mathbb{H}^n$ пространства: $U_{(z_1,\dots,z_n),\varepsilon} = \{\,(w_1,\dots,w_n) \mid \sum |w_i - z_i|^2 < \varepsilon^2\,\}$.
(3) Сфера $S^n = \{\,(x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i^2 = 1\,\}$, шар $D^n = \{\,(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i^2 \leqslant 1\,\}$, куб $I^n = \{\,(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1\,\}$ и симплекс $\Delta^n = \{\,(x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geqslant 0,\ \sum x_i = 1\,\}$ с индуцированной топологией.
(4) Проективное пространство $\mathbb{RP}^n = \{\text{прямые в } \mathbb{R}^{n+1}\} = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0)/\mathbb{R}^*$ с фактортопологией; комплексное и кватернионное проективные пространства $\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0)/\mathbb{C}^*$ и $\mathbb{HP}^n = (\mathbb{H}^{n+1} \setminus 0)/\mathbb{H}^*$.
(5) Многообразия Грассмана $\mathrm{Gr}(k,n) = \{\,k\text{-мерные подпространства в } \mathbb{R}^n\,\} = \mathring{\mathrm{Mat}}_{k\times n}(\mathbb{R})/\mathrm{GL}(k,\mathbb{R})$ с фактортопологией, $\mathring{\mathrm{Mat}}_{k\times n}(\mathbb{R})$ — матрицы $k \times n$ ранга k с индуцированной топологией. Комплексные и кватернионные грассманианы $\mathbb{C}\mathrm{Gr}(k,n) = \mathring{\mathrm{Mat}}_{k\times n}(\mathbb{C})/\mathrm{GL}(k,\mathbb{C})$ и $\mathbb{H}\mathrm{Gr}(k,n) = \mathring{\mathrm{Mat}}_{k\times n}(\mathbb{H})/\mathrm{GL}(k,\mathbb{H})$. Ориентированный грассманиан $\mathrm{Gr}_+(k,n) = \{\,\text{ориентированные } k\text{-мерные подпространства в } \mathbb{R}^n\,\} = \mathring{\mathrm{Mat}}_{k\times n}(\mathbb{R})/\mathrm{GL}_+(k,\mathbb{R})$ с фактортопологией, где $\mathrm{GL}_+(k,\mathbb{R}) = \{\,g \in \mathrm{GL}(k,\mathbb{R}) \mid \det g > 0\,\}$.
(6) Многообразия флагов $\mathrm{Fl}(k_1,\dots,k_r;n) = \{\,(U_1 \subset \dots \subset U_r \subset \mathbb{R}^n \mid \dim U_i = k_i\,\} \subset \prod_{i=1}^r \mathrm{Gr}(k_i,n)$; их комплексный $\mathbb{C}\mathrm{Fl}(k_1,\dots,k_r;n)$ и кватернионный $\mathbb{H}\mathrm{Fl}(k_1,\dots,k_r;n)$ аналоги.
(7) Классические группы $O(n)$, $U(n)$, $SO(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$ (кватернионно-унитарные матрицы) с индуцированной топологией.
(8) Многообразия Штифеля $V(k;n) = \{\,\text{ортонормированные } k\text{-реперы в } \mathbb{R}^n\,\} \subset \mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{R})$ с индуцированной топологией, а также их комплексный $\mathbb{C}V(k,n)$ и кватернионный $\mathbb{H}V(k,n)$ аналоги.
(9) Классические поверхности: сфера, проективная плоскость и бутылка Клейна с дырками и ручками.
(10) Бесконечномерное пространство $\mathbb{R}^\infty = \{\,(x_i)_{i=1}^\infty \mid x_i = 0 \text{ при } i \gg 1\,\} = \bigcup_{n=1}^\infty \mathbb{R}^n$ с топологией прямого предела: $Z \subset \mathbb{R}^\infty$ замкнуто $\iff$ $Z \cap \mathbb{R}^n$ замкнуто $\forall n$. Аналогично определяются $\mathbb{C}^\infty = \bigcup_{n=1}^\infty \mathbb{C}^n$, $S^\infty = \bigcup_{n=1}^\infty S^n$, $D^\infty = \bigcup_{n=1}^\infty D^n$, $\mathbb{RP}^\infty = \bigcup_{n=1}^\infty \mathbb{RP}^n$, $\mathrm{Gr}(k,\infty) = \bigcup_{n=k}^\infty \mathrm{Gr}(k,n)$, $\mathbb{CP}^\infty$, $\mathbb{HP}^\infty$, …

Все перечисленные выше пространства обладают счетной базой, хаусдорфовы, локально компактны (кроме бесконечномерных) и локально линейно связны. Все они кроме нульмерной сферы S^0 и $V(n,n) = O(n)$ связны и даже линейно связны. Напротив, несвязное объединение двух непустых топологических пространств несвязно. Конечномерные сферы, шары, кубы, симплексы, проективные пространства, грассманианы, многообразия флагов и Штифеля, группы $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$ и классические поверхности без дырок компактны.

С помощью следующих операций можно получать новые топологические пространства.

(1) Фактор топологического пространства X по подмножеству A — это фактор X по отношению эквивалентности $\sim$, в котором $x \sim y \iff$ либо $x = y$, либо $x, y \in A$. Он обозначается X/A.
(2) Цилиндр над топологическим пространством X — это $X \times I$, где $I = [0,1]$ — единичный отрезок.
(3) Конус CX над топологическим пространством X — это цилиндр $X \times I$, в котором отождествлены все точки верхнего основания $X \times 1 \subset X \times I$. Иначе говоря, $CX = (X \times I)/(X \times 1)$.
(4) Надстройка ΣX над X — это цилиндр $X \times I$, в котором отождествлены все точки верхнего основания $X \times 1$ и все точки нижнего основания $X \times 0$, то есть $\Sigma X = CX/(X \times 0)$.
(5) Пусть X и Y — топологические пространства, $A \subset Y$ — подмножество и $\varphi : A \to X$ — непрерывное отображение. В несвязном объединении $X \sqcup Y$ отождествим каждую точку $a \in A \subset Y$ с $\varphi(a) \in X$. Полученное пространство обозначается $X \cup_\varphi Y$ и называется приклеиванием X к Y посредством φ.

(6) Пусть X и Y — топологические пространства, а $f : X \to Y$ — непрерывное отображение. Приклеивание цилиндра $X \times I$ к Y вдоль нижнего основания посредством $X \times 0 = X \xrightarrow{f} Y$ называется цилиндром отображения f и обозначается $\mathrm{Cyl}(f)$. Приклеивание конуса CX к Y вдоль нижнего основания посредством $X \times 0 = X \xrightarrow{f} Y$ называется конусом отображения f и обозначается $\mathrm{Con}(f)$.

(7) Множество всех непрерывных отображений $C(X,Y)$ наделяется компактно-открытой топологией (ее базу составляют множества $U(K,O) = \{ f \mid f(K) \subset O \}$, где $K \subset X$ — компактно, а $O \subset Y$ — открыто).

(8) Пространство $C(I,X)$ называют пространством путей в X. В нем часто рассматривают подпространства $E(X;x_0,x_1) = \{ \varphi \in C(I,X) \mid \varphi(0) = x_0,\ \varphi(1) = x_1 \}$, $E(X;x_0) = \{ \varphi \in C(I,X) \mid \varphi(0) = x_0 \}$ и пространство петель $\Omega(X;x_0) = \{ \varphi \in C(I,X) \mid \varphi(0) = \varphi(1) = x_0 \}$.

Операции над пространствами с отмеченными точками подправляются так, чтобы результат операции имел каноническую отмеченную точку. В произведении $X \times Y$ отмеченной считается точка (x_0, y_0), а в факторпространстве X/A — образ точки x_0. В цилиндре, конусе и надстройке над (X, x_0) отождествляются все точки образующей $x_0 \times I$, а их образ считается отмеченной точкой. Если X — пространство с отмеченной точкой, то пространство путей, начинающихся в отмеченной точке обозначается EX, а пространство петель, начинающихся (и кончающихся) в отмеченной точке обозначается ΩX. В обоих случаях отмеченной точкой считается постоянный путь $\varphi(t) \equiv x_0$. Кроме того, есть и операции, применяемые только к пространствам с отмеченной точкой. Например, букет $X \vee Y = (X \sqcup Y)/\{ x_0, y_0 \}$ и смэш-произведение $X \# Y = (X \times Y)/(X \vee Y)$.

Часть 3. Гомотопическая категория

Определение 3.1. Непрерывные отображения $f, g : X \to Y$ называются гомотопными, если существует непрерывное отображение (гомотопия) $\varphi : X \times I \to Y$, так что $\varphi_0 = \varphi(-,0) = f$ и $\varphi_1 = \varphi(-,1) = g$.

Пример 3.2. Все отображения в отрезок гомотопны друг другу: можно взять $\phi(x,t) = tg(x) + (1-t)f(x)$.

Легко проверить, что гомотопность является отношением эквивалентности (будем его обозначать $f \sim g$). Множество классов гомотопности отображений из X в Y обозначается $\pi(X,Y)$.

Гомотопической категорией называется категория, в которой 1) объекты = топологические пространства; 2) морфизмы из X в $Y = \pi(X,Y)$; 3) композиция — естественная.

Изоморфизмы в гомотопической категории называются гомотопическими эквивалентностями. Таким образом, X гомотопически эквивалентно Y, если существуют непрерывные отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$, так что $f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y$ и $g \circ f \sim \mathrm{Id}_X$. Топологическое пространство называется стягиваемым, если оно гомотопически эквивалентно точке.

Пример 3.3. Отрезок стягиваем: возьмем произвольные отображения $f : * \to I$, $g : I \to *$. Тогда $f \circ g \sim \mathrm{Id}_I$, так как любые отображения в отрезок гомотопны, и $g \circ f \sim \mathrm{Id}_*$, так как любые отображения в точку равны.

Лемма 3.4. *Стягиваемое пространство связно.*

Доказательство: предположим, что X стягиваемо, но не связно. Стягиваемость означает существование гомотопии $\varphi : X \times I \to X$, такой что $\varphi_0 = \mathrm{Id}_X$, а $\mathrm{Im}(\phi_1) = x_0 \in X$. Несвязность означает, что существуют непустые открытые подмножества $U, V \subset X$, такие что $U \cap V = \emptyset$ и $U \cap V = X$. Пусть, скажем $x_0 \in U$. Тогда для всех $x \in X$ имеем $\varphi_x(1) = \varphi(x,1) = x_0 \in U$. Положим $U_x = \{ t \in I \mid \varphi(x,t) \in U \}$, $V_x = \{ t \in I \mid \varphi(x,t) \in V \}$. Ясно, что U_x и V_x открыты в I, $U_x \cup V_x = I$, $U_x \cap V_x = \emptyset$, и $1 \in U_x$. Но отрезок I связен, поэтому $U_x = I$, следовательно $\varphi(x,0) \in U$, то есть $\varphi_0(X) \subset U$, что противоречит условию $\varphi_0 = \mathrm{Id}_X$. $\square$

Помимо гомотопической категории пространств часто рассматривают гомотопическую категорию пространств с отмеченной точкой. Морфизмами в этой категории являются гомотопические классы $\pi_b(X,Y)$ непрерывных отбражений пространств с отмеченными точками. На гомотопию φ отображений пространств с отмеченными точками $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ накладывается условие $\varphi(x_0, t) \equiv y_0$.

Основной задачей гомотопической топологии является классификация классов гомотопической эквивалентности топологических пространств (гомотопических типов), то есть изучение гомотопических инвариантов.

Примеры 3.5. (1) $\pi_0(X) = \pi(*, X)$ — множество компонент линейной связности;

(2) $\pi_1(X) = \pi_b(S^1, X)$ — фундаментальная группа.