Спектральная последовательность расслоения

Часть 1. Спектральная последовательность фильтрованного комплекса

Фильтрация на абелевой группе A — это последовательность вложенных подгрупп $\dots \subset F^{q+1}A \subset F^qA \subset F^{q-1}A \subset \dots$. Фильтрованным комплексом называется комплекс $(C^\bullet, d)$, на каждом из членов C^n которого задана фильтрация $F^\bullet C^n$, такая что $d(F^qC^n) \subset F^qC^{n+1}$. Пусть $C^\bullet$ — фильтрованный комплекс. Тогда $F^qZ^n := Z^n \cap F^qC^n$ — фильтрация на группе n-коциклов, а $F^qB^n := B^n \cap F^qC^n$ — фильтрация на группе n-кограниц.

Лемма 1.1. *Имеем $F^qB^n \subset F^qZ^n$, а факторгруппы F^qZ^n/F^qB^n образуют фильтрацию группы когомологий $H^n(C^\bullet) = Z^n/B^n$, так что $F^qH^n(C^\bullet) = F^qZ^n/F^qB^n$.*

Доказательство: ядром отображения $F^qZ^n \to Z^n \to Z^n/B^n = H^n$ является $B^n \cap F^qZ^n = B^n \cap Z^n \cap F^qC^n = B^n \cap F^qC^n = F^qB^n$, следовательно имеем вложение $F^qZ^n/F^qB^n \subset H^n$, причем ясно, что $F^qZ^n/F^qB^n \subset F^{q+1}Z^n/F^{q+1}B^n$. □

Группа $G_F^1A := F^qA/F^{q+1}A$ называется q-ым фактором фильтрации F, а градуированная группа $G_F^\bullet A := \oplus_{q=-\infty}^{\infty} G_F^qA$ называется присоединенной градуированной к A относительно фильтрации F.

Вопрос: Как связаны присоединенная градуированная группа $G_F^\bullet H^n$ с когомологиями присоединенного градуированного комплекса $G_F^\bullet C^\bullet$?

Рассмотрим вначале простейший случай. Рассмотрим фильтрацию длины 2, то есть предположим, что $0 = F^2C^\bullet \subset F^1C^\bullet \subset F^0C^\bullet = C^\bullet$. Тогда возникает точная тройка комплексов $0 \to G_F^1C^\bullet \to C^\bullet \to G_F^0C^\bullet \to 0$. По лемме о змее она дает точную последовательность групп когомологий

$$\dots \to H^{n-1}(G_F^0C^\bullet) \xrightarrow{\delta} H^n(G_F^1C^\bullet) \to H^n(C^\bullet) \to H^n(G_F^0C^\bullet) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(G_F^1C^\bullet) \to \dots$$

Легко видеть, что $F^0H^n(C^\bullet) = \mathrm{Im}(H^n(G_F^1C^\bullet) \to H^n(C^\bullet))$. Поэтому

$$G_F^\bullet(H^n(C^\bullet)) = \mathrm{Coker}(H^{n-1}(G_F^0C^\bullet) \xrightarrow{\delta} H^n(G_F^1C^\bullet)) \oplus \mathrm{Ker}(H^n(G_F^0C^\bullet) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(G_F^1C^\bullet)).$$

Это утверждение удобно записать в виде таблицы

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & H^{n-1}(G_F^1C^\bullet) & & H^n(G_F^1C^\bullet) & & H^{n+1}(G_F^1C^\bullet) & H^{n+2}(G_F^1C^\bullet) & \dots \\
 & \uparrow\delta & \searrow & \uparrow\delta & \searrow & \uparrow\delta & \uparrow\delta & \\
\dots & H^{n-2}(G_F^0C^\bullet) & & H^{n-1}(G_F^0C^\bullet) & & H^n(G_F^0C^\bullet) & H^{n+1}(G_F^0C^\bullet) & \dots
\end{array}$$

Вертикали таблицы удобно рассматривать как комплексы длины 2. Тогда утверждение состоит в том, что если вычислить когомологии этих комплексов и проссуммировать их по диагоналям, то получатся присоединенные градуированные группы к когомологиям исходного комплекса.

Рассмотрим теперь фильтрацию длины 3: $0 = F^3C^\bullet \subset F^2C^\bullet \subset F^1C^\bullet \subset F^0C^\bullet = C^\bullet$. Положим также $G_F^{[a,b]}C^\bullet := F^bC^\bullet/F^{a+1}C^\bullet$. Тогда $0 \subset F^1C^\bullet \subset C^\bullet$ — фильтрация длины 2, присоединенные факторы которой есть $F^1C^\bullet = G_F^{[2,1]}C^\bullet$ и $G_F^0C^\bullet$. Следовательно, согласно предыдущим рассмотрениям, присоединенные градуированные группы к когомологиям исходного комплекса вычисляются таблицей

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & H^{n-1}(G_F^{[2,1]}C^\bullet) & & H^n(G_F^{[2,1]}C^\bullet) & & H^{n+1}(G_F^{[2,1]}C^\bullet) & H^{n+2}(G_F^{[2,1]}C^\bullet) & \dots \\
 & \uparrow\delta & \searrow & \uparrow\delta & \searrow & \uparrow\delta & \uparrow\delta & \\
\dots & H^{n-2}(G_F^0C^\bullet) & & H^{n-1}(G_F^0C^\bullet) & & H^n(G_F^0C^\bullet) & H^{n+1}(G_F^0C^\bullet) & \dots
\end{array}$$

С другой стороны, имеем фильтрацию $0 \subset F^2C^\bullet \subset F^1C^\bullet$, которая показывает, что верхняя строка предыдущей таблицы в свою очередь вычисляется таблицей

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & H^{n-1}(G_F^2C^\bullet) & & H^n(G_F^2C^\bullet) & & H^{n+1}(G_F^2C^\bullet) & H^{n+2}(G_F^2C^\bullet) & \dots \\
 & \uparrow\delta & \searrow & \uparrow\delta & \searrow & \uparrow\delta & \uparrow\delta & \\
\dots & H^{n-2}(G_F^1C^\bullet) & & H^{n-1}(G_F^1C^\bullet) & & H^n(G_F^1C^\bullet) & H^{n+1}(G_F^1C^\bullet) & \dots
\end{array}$$

Ключевое наблюдение состоит в том, что эти две таблицы можно объединить! А именно, отображение $H^{n-1}(G_F^0 C^\bullet) \xrightarrow{\delta} H^n(G_F^{[2,1]}C^\bullet) \to G_F^1 H^n(G_F^{[2,1]}C^\bullet) = \mathrm{Ker}(H^n(G_F^1 C^\bullet) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(G_F^2 C^\bullet))$ есть ни что иное как отображение $\delta : H^{n-1}(G_F^0 C^\bullet) \to H^n(G_F^1 C^\bullet)$ возникающее из фильтрации $0 \subset G_F^1 C^\bullet \subset G_F^{[1,0]} C^\bullet$ (это следует из функториальности связывающего гомоморфизма δ, примененной к морфизму точных троек

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & G_F^{[2,1]}C^\bullet & \longrightarrow & G_F^{[2,0]}C^\bullet & \longrightarrow & G_F^0 C^\bullet & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & G_F^1 C^\bullet & \longrightarrow & G_F^{[1,0]}C^\bullet & \longrightarrow & G_F^0 C^\bullet & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Следовательно, в таблице

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & H^n(G_F^2 C^\bullet) & H^{n+1}(G_F^2 C^\bullet) & H^{n+2}(G_F^2 C^\bullet) & H^{n+3}(G_F^2 C^\bullet) & \dots \\ & \delta\uparrow & \delta\uparrow & \delta\uparrow & \delta\uparrow & \\ \dots & H^{n-1}(G_F^1 C^\bullet) & H^n(G_F^1 C^\bullet) & H^{n+1}(G_F^1 C^\bullet) & H^{n+2}(G_F^1 C^\bullet) & \dots \\ & \delta\uparrow & \delta\uparrow & \delta\uparrow & \delta\uparrow & \\ \dots & H^{n-2}(G_F^0 C^\bullet) & H^{n-1}(G_F^0 C^\bullet) & H^n(G_F^0 C^\bullet) & H^{n+1}(G_F^0 C^\bullet) & \dots \end{array}$$

вертикали являются комплексами. Обозначим через $E_2^{p,q}$ гомологию этих комплексов в члене $H^{p+q}(G_F^q C^\bullet)$. Тогда $E_2^{n-1,0}$ равно $\mathrm{Ker}(H^{n-1}(G_F^0 C^\bullet) \xrightarrow{\delta} G_F^1 H^n(G_F^{[2,1]}C^\bullet))$, следовательно возникает отображение d_2 из $E_2^{n-1,0}$ в $G_F^0 H^n(G_F^{[2,1]}C^\bullet) = \mathrm{Coker}(H^{n-1}(G_F^1 C^\bullet) \xrightarrow{\delta} H^n(G_F^0 C^\bullet)) = E_2^{n-2,2}$. Получаем таблицу

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & E_2^{n,2} & E_2^{n+1,2} & E_2^{n+2,2} & E_2^{n+3,2} & \dots \\ & \overset{d_2}{\swarrow} & \overset{d_2}{\swarrow} & \overset{d_2}{\swarrow} & & \\ \dots & E_2^{n-1,1} & E_2^{n,1} & E_2^{n+1,1} & E_2^{n+2,1} & \dots \\ & \overset{d_2}{\swarrow} & \overset{d_2}{\swarrow} & \overset{d_2}{\swarrow} & & \\ \dots & E_2^{n-2,0} & E_2^{n-1,0} & E_2^{n,0} & E_2^{n+1,0} & \dots \end{array}$$

Отображения d_2 в этой таблице опять удобно рассматривать как комплексы. Тогда утверждение состоит в том, что если вычислить когомологии этих комплексов и проссуммировать их по диагоналям, то получатся присоединенные градуированные группы к когомологиям исходного комплекса. Эту проверку оставим в качестве упражнения.

Определение 1.2. Спектральной последовательностью называется набор абелевых групп $E_r^{p,q}$, $r \geqslant 0$ и морфизмов $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p-r+1,q+r}$, таких что $d_r^{p-r+1,q+r} \circ d_r^{p,q} = 0$ и $E_{r+1}^{p,q} = \mathrm{Ker}\, d_r^{p,q} / \mathrm{Im}\, d_r^{p+r-1,q-r}$ (то есть $(r+1)$-ый член равен когомологиям r-ого члена). Говорят, что спектральная последовательность $E_r^{p,q}$ сходится к градуированной группе $E = \oplus E^n$, если последовательность $E_r^{p,q}$ стабилизируется (то есть для каждых p и q существует $r_0 = r_0(p,q)$, такое что $E_r^{p,q} = E_{r_0}^{p,q}$ при $r \geqslant r_0$), и на каждой из групп E^n задана фильтрация $F^\bullet E^n$, такая что $G_F^p E^{p+q} = E_\infty^{p,q} := \lim_{r\to\infty} E_r^{p,q}$.

Теорема 1.3. *Если $C^\bullet$ — фильтрованный комплекс, и фильтрация каждого члена* конечна *и* регулярна *(то есть для всякого p имеем $F^q C^p = 0$ при $q \gg 0$ и $F^q C^p = C^p$ при $q \ll 0$), то существует спектральная последовательность с членом $E_0^{p,q} = G_F^q C^{p+q}$, сходящаяся к $E = \oplus H^n(C^\bullet)$.*

Доказательство: положим $Z_r^{p,q} = \{\, c \in F^q C^{p+q} \mid d(c) \in F^{q+r} C^{p+q+1} \,\}$, $B_r^{p,q} = Z_{r-1}^{p-1,q+1} + d(Z_{r-1}^{p+r-2,q-r+1})$, и $E_r^{p,q} = Z_r^{p,q} / B_r^{p,q}$. Далее требуются многочисленные проверки. □

Предложение 1.4. *Предположим, что комплекс $C^\bullet$ является* дифференциальным градуированным кольцом, *то есть в нем задано умножение $C^m \times C^n \to C^{m+n}$ и $d(c_1 c_2) = (dc_1)c_2 + (-1)^m c_1 (dc_2)$, если $c_1 \in C^m$, $c_2 \in C^n$, а фильтрация $F^\bullet$ —* мультипликативна, *то есть $(F^q C^m)(F^s C^n) \subset F^{q+s} C^{m+n}$. Тогда в каждом члене спектральной последовательности существует умножение $E_r^{p,q} \times E_r^{p',q'} \to E_r^{p+p',q+q'}$, такое что $d_r^{p+p',q+q'}(e_1 e_2) = (d_r^{p,q} e_1) e_2 + (-1)^{p+q} e_1 (d_r^{p',q'} e_2)$ для всех $e_1 \in E_r^{p,q}$, $e_2 \in E_r^{p',q'}$.*

Доказательство: заметим, что $Z_r^{p,q} \cdot Z_r^{p',q'} \subset Z_r^{p+p',q+q'}$, то есть $\oplus_{p,q} Z_r^{p,q}$ является биградуированным подкольцом в $\oplus_{p,q} F^q C^{p+q}$, а $\oplus_{p,q} B_r^{p,q}$ — биградуированным идеалом в нем, поэтому на $\oplus_{p,q} E_r^{p,q}$ индуцируется структура биградуированного кольца. Правило Лейбница в нем очевидно вытекает из правила Лейбница в исходном кольце. □

Часть 2. Спектральная последовательность расслоения

Начнем с примера, который нам уже встречался. Рассмотрим сингулярный коцепной комплекс $C^\bullet(X)$ клеточного пространства X и положим $F^qC^n(X) = \mathrm{Ker}(C^n(X) \to C^n(\mathrm{sk}_{q-1}X)) = \mathrm{Hom}(C_n(X)/C_n(\mathrm{sk}_{q-1}X), \mathbb{Z})$. Легко показать, что $E_0^{p,q} = G_F^qC^{p+q}(X) = \mathrm{Hom}(C_{p+q}(X)/C_{p+q}(\mathrm{sk}_{q-1}X), \mathbb{Z})/\mathrm{Hom}(C_{p+q}(X)/C_{p+q}(\mathrm{sk}_qX), \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(C_{p+q}(\mathrm{sk}_qX)/C_{p+q}(\mathrm{sk}_{q-1}X), \mathbb{Z})$, а $E_1^{p,q} = H^{p+q}(\mathrm{sk}_qX/\mathrm{sk}_{q-1}X)$. Так как $\mathrm{sk}_qX/\mathrm{sk}_{q-1}X = \vee_{\alpha\in \mathsf{C}_X^q} S^q$, то $E_1^{p,q} = 0$ при $p \neq 0$, а $E_1^{0,q} = \oplus_{\alpha\in \mathsf{C}_X^q}\mathbb{Z} = \mathcal{C}^q(X)$. Можно показать, что дифференциал $d_1 : E_1^{0,q} \to E_1^{0,q+1}$ совпадает с дифференциалом клеточного комплекса, поэтому второй член равен клеточным когомологиям, а спектральная последовательность вырождается во втором члене (то есть $d_r^{p,q} = 0$ при $r \geqslant 2$) и получаем новое доказательство того, что клеточные когомологии совпадают с сингулярными.

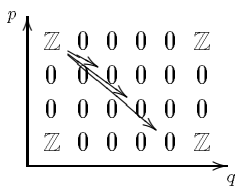
Пусть теперь $p : E \to B$ — локально тривиальное расслоение. Предположим, что B — клеточное пространство и $\pi_1(B) = 0$. Пусть $E_q = p^{-1}(\mathrm{sk}_qB)$. Рассмотрим сингулярный коцепной комплекс $C^\bullet(E)$ и фильтрацию $F^qC^n(E) = \mathrm{Ker}(C^n(E) \to C^n(E_{q-1}) = \mathrm{Hom}(C_n(E)/C_n(E_{q-1}), \mathbb{Z})$. Тогда $E_0^{p,q} = G_F^qC^{p+q}(E) = \mathrm{Hom}(C_{p+q}(E)/C_{p+q}(E_{q-1}), \mathbb{Z})/\mathrm{Hom}(C_{p+q}(E)/C_{p+q}(E_q), \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(C_{p+q}(E_q)/C_{p+q}(E_{q-1}), \mathbb{Z})$, откуда получаем $E_1^{p,q} = H^{p+q}(E_q/E_{q-1})$. Заметим, что $\mathrm{sk}_qB/\mathrm{sk}_{q-1}B = \vee_{\alpha\in \mathsf{C}_B^q} S^q$. Кроме того, для каждой q-мерной клетки $e_\alpha^q \subset B$ расслоение $\chi_\alpha^*E = E \times_B D^q \to D^q$ тривиально, то есть $\chi_\alpha^*E \cong D^q \times F$, где F — слой E над B. Поэтому $E_q/E_{q-1} \cong \vee((D^q \times F)/(S^{q-1} \times F))$, следовательно, в силу формулы Кюннета и аксиомы точности $H^{p+q}(E_q/E_{q-1}) = \oplus_{\alpha\in \mathsf{C}_B^q} H^p(F) = \mathcal{C}^q(B, H^p(F))$. Можно показать, что d_1 совпадает с дифференциалом клеточного комплекса (именно здесь важно, что $\pi_1(B) = 0$), поэтому $E_2^{p,q} = H^q(B, H^p(F))$. Получаем

Теорема 2.1. *Если $p : E \to B$ — локально тривиальное расслоение, B — клеточное пространство и $\pi_1(B) = 0$, то существует спектральная последовательность со вторым членом $E_2^{p,q} = H^q(B, H^p(F))$, которая сходится к $\oplus H^n(E)$.*

Замечание 2.2. Та же теорема верна и для расслоений в смысле Гуревича. Для доказательство надо проверить, что есть $p : E \to D^q$ — расслоение в смысле Гуревича со слоем F, то найдется гомотопическая эквивалентность $f : E \to D^q \times F$, такая что $p = \mathrm{pr} \circ f$, где $\mathrm{pr} : D^q \times F \to D^q$ — проекция на первый сомножитель, а затем повторить приведенное выше рассуждение, заменив гомеоморфизмы $\chi_\alpha^*E \cong D^q \times F$ гомотопическими эквивалентностями.

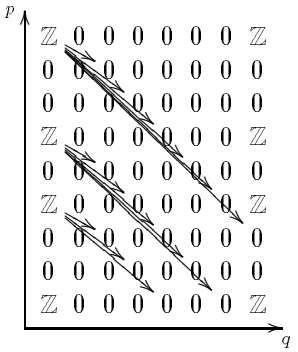
Следствие 2.3. *Имеем $H^\bullet(SU(3)) \cong H^\bullet(S^3 \times S^5)$.*

Доказательство: действие группы $SU(3)$ на $S^5 \subset \mathbb{C}^3$ можно рассматривать как расслоение $SU(3) \to S^5$ со слоем $SU(2) \cong S^3$. Второй член его спектральной последовательности имеет вид, изображенный на рисунке справа. На этом рисунке хорошо видно, что все дифференциалы, начиная с d_2 обращаются в нуль, поэтому спектральная последовательность вырождается во втором члене и $H^\bullet(SU(3)) = H^\bullet(S^5) \otimes H^\bullet(S^3) = H^\bullet(S^3 \times S^5)$. □



Следствие 2.4. *Имеем $H^\bullet(SU(4)) \cong H^\bullet(S^3 \times S^5 \times S^7)$.*

Доказательство: действие группы $SU(4)$ на $S^7 \subset \mathbb{C}^4$ можно рассматривать как расслоение $SU(4) \to S^7$ со слоем $SU(3)$. Второй член его спектральной последовательности имеет вид, изображенный на рисунке справа. На этом рисунке хорошо видно, что все дифференциалы, начиная с d_2 обращаются в нуль, поэтому спектральная последовательность вырождается во втором члене и $H^\bullet(SU(4)) = H^\bullet(S^7) \otimes H^\bullet(SU(3)) = H^\bullet(S^3 \times S^5 \times S^7)$. □



Для всякого n действие группы $SU(n)$ на $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ можно рассматривать как расслоение $SU(n) \to S^{2n-1}$ со слоем $SU(n-1)$. Можно попытаться по индукции доказать, что $H^\bullet(SU(n)) = H^\bullet(\prod_{k=2}^n S^{2k-1})$. Действительно, второй член спектральной последовательности этого расслоения по предположению индукции равен $H^\bullet(S^{2n-1}, H^\bullet(SU(n-1))) = H^\bullet(S^{2n-1}) \otimes H^\bullet(\prod_{k=2}^{n-1} S^{2k-1}) = H^\bullet(\prod_{k=2}^n S^{2k-1})$, и надо лишь проверить, что все дифференциалы начиная с d_2 равны нулю. Однако, явное вычисление дифференциалов в спектральной последовательности задача весьма сложная. Обычно для вычисления дифференциалов используются свойства спектральных последовательностей. Например, при $n \leqslant 4$ нам хватило «соображений размерности». Однако при $n = 5$ этого уже не достаточно — вполне может быть ненулевой дифференциал $d_9 : H^0(S^9) \otimes H^8(SU(4)) \to H^9(S^9) \otimes H^0(SU(4))$. Здесь приходит на помощь мультипликативная структура.