Применения спектральных последовательностей

Часть 1. Мультипликативная структура в спектральной последовательности расслоения

Предложение 1.1. *Спектральная последовательность расслоения обладает мультипликативной структурой, такой что умножение в члене E_2 совпадает с когомологическим умножением $H^q(B, H^p(F)) \times H^{q'}(B, H^{p'}(F)) \to H^{q+q'}(B, F \times F')$, а умножение в члене E_∞ — с умножением, индуцированным когомологическим умножением в $H^\bullet(E)$.*

Доказательство: надо построить умножение в $C^\bullet(E)$, согласованное с фильтрацией. Заметим, что стандартное $\cup$-умножение в $C^\bullet(E)$ можно определять формулой $c_1 \cup c_2 = \Delta_E^*(c_1 \times c_2)$, где $c_1 \times c_2 \in C^\bullet(E \times E)$ определяется как $(c_1 \times c_2)(\sigma) = c_1(p_1 \circ \sigma_{0,\dots,n_1}) c_2(p_2 \circ \sigma_{n_1,\dots,n_1+n_2})$, $p_{1,2} : E \times E \to E$ — проекции, а $\Delta_E : E \to E \times E$ — диагональное вложение. Однако, это умножение *не согласовано с фильтрацией* — из $\sigma \in C_{n+m}(E_t)$ не следует $\Delta_{E*}(\sigma) \in \sum_{q+s=t} C_{n+m}(E_q \times E_s)$ (так как диагональное вложение $\Delta_B : B \to B \times B$ *не является* клеточным отображением). Чтобы исправить ситуацию, выберем клеточную аппроксимацию $\Delta'_B : B \to B \times B$ отображения Δ_B, накроем гомотопию $\Delta_B \sim \Delta'_B$ гомотопией $\Delta_E \sim \Delta'_E$, и определим теперь умножение в $C^\bullet(E)$ как композицию $c_1 \cup' c_2 = {\Delta'_E}^*(c_1 \times c_2)$. Ясно, что новое умножение согласовано с фильтрацией. Кроме того, легко проверить, что дифференциал удовлетворяет правилу Лейбница относительно нового умножения, поэтому в спектральной последовательности возникает мультипликативная структура. Ее согласованность с когомологическими умножениями следует из гомотопности Δ_E и Δ'_E. □

В качестве применения мультипликативной структуры вычислим когомологии группы $SU(n)$ для всех n.

Лемма 1.2. *$H^\bullet(SU(n)) = H^\bullet(\prod_{k=2}^n S^{2k-1}) = \Lambda_{\mathbb{Z}}(x_3, x_5, \dots, x_{2n-1})$ — внешняя алгебра над $\mathbb{Z}$, порожденная образующими $x_3, x_5, \dots, x_{2n-1}$ степеней 3, 5, ..., $2n-1$.*

Доказательство: применим индукцию по n. Случаи $n = 2$, $n = 3$ и $n = 4$ были разобраны на прошлой лекции. Пусть теперь n — любое. Рассмотрим спектральную последовательность расслоения $SU(n) \to S^{2n-1}$ со слоем $SU(n-1)$. Ее второй член имеет вид $E_2^{p,q} = H^q(S^{2n-1}, H^p(SU(n-1)))$. Так как $H^q(S^{2n-1})$ — свободные группы, из формул универсальных коэффициентов следует, что $E_2^{p,q} \cong H^q(S^{2n-1}) \otimes H^p(SU(n-1))$. Покажем, что спектральная последовательность вырождена во втором члене, то есть, что дифференциал $d_{2n-1}^{p,0} : E_2^{p,0} \to E_2^{p-2n+2,2n-1}$ равен нулю. Для этого заметим, что по предположению индукции имеем $E_2^{\bullet,0} = H^\bullet(SU(n-1)) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}(x_3, x_5, \dots, x_{2n-3})$. Тогда $d_{2n-1}^{2k-1,0}(x_{2k-1}) \in E_2^{2k-1-2n+2,2n-1} = 0$, так как $2k-1 < 2n-2$, значит по правилу Лейбница $d_{2n-1}(x_{2k_1-1} \cup \dots \cup x_{2k_r-1}) = \sum_{s=1}^r \pm x_{2k_1-1} \cup \dots \cup d_{2n-1}(x_{2k_s-1}) \cup \dots \cup x_{2k_r-1}) = 0$. Таким образом, $E_\infty^{p,q} = H^q(S^{2n-1}) \otimes H^p(SU(n-1))$, следовательно, присоединенное градуированное кольцо к кольцу $H^\bullet(SU(n))$ изоморфно $\Lambda_{\mathbb{Z}}(x_3, \dots, x_{2n-1})$, где x_{2n-1} — образующая $H^{2n-1}(S^{2n-1})$. Пусть $\tilde{x}_3, \dots, \tilde{x}_{2n-1}$ — какие-либо поднятия элементов $x_3, \dots, x_{2n-1}$ в $H^\bullet(SU(n))$. Тогда $\tilde{x}_i \cup \tilde{x}_j = -\tilde{x}_j \cup \tilde{x}_i$ и $\tilde{x}_i \cup \tilde{x}_i = 0$ так как умножение в нечетных когомологиях косокоммутативно и $H^\bullet(SU(n))$ — свободно. Следовательно, отображение $\varphi : \Lambda_{\mathbb{Z}}(x_3, \dots, x_{2n-1}) \to H^\bullet(SU(n))$, $x_i \mapsto \tilde{x}_i$ — гомоморфизм колец. По предположению индукции он индуцирует изоморфизм идеалов $\Lambda_{\mathbb{Z}}(x_3, \dots, x_{2n-3}) \cup x_{2n-1} \to F^1 H^\bullet(SU(n)) \cong H^\bullet(SU(n-1)) \cup \tilde{x}_{2n-1}$ и изоморфизм факторколец $\Lambda_{\mathbb{Z}}(x_3, \dots, x_{2n-3}) \to G_F^0 H^\bullet(SU(n)) = H^\bullet(SU(n-1))$, следовательно является изоморфизмом. □

Часть 2. Группа $\pi_4(S^3)$

Вычисли группу $\pi_4(S^3)$. Заметим, что $\pi_n(S^3) = 0$ при $n < 3$ и $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$. Следовательно, существует отображение $S^3 \to K(\mathbb{Z}, 3)$, индуцирующее изоморфизм групп π_3. Заменим это отображение на гомотопически эквивалентное ему расслоение в смысле Гуревича и обозначим через X слой этого расслоения.

Лемма 2.1. *$\pi_n(X) = 0$ при $n < 4$, а $\pi_4(X) = \pi_4(S^3)$.*

Доказательство: гомотопическая последовательность расслоения $S^3 \to K(\mathbb{Z},3)$ имеет вид

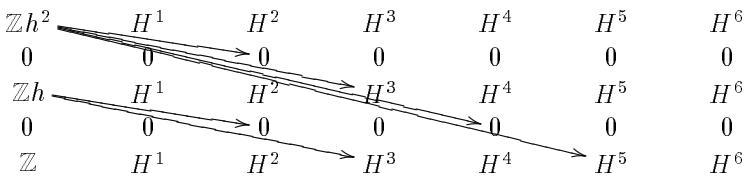
$$\cdots \to \pi_5(K(\mathbb{Z},3)) \to \pi_4(X) \to \pi_4(S^3) \to \pi_4(K(\mathbb{Z},3)) \to \pi_3(X) \to \pi_3(S^3) \to \pi_3(K(\mathbb{Z},3))$$
$$\to \pi_2(X) \to \pi_2(S^3) \to \pi_2(K(\mathbb{Z},3)) \to \pi_1(X) \to \pi_1(S^3) \to \pi_1(K(\mathbb{Z},3)) \to \pi_0(X) \to \pi_0(S^3) \to \pi_0(K(\mathbb{Z},3))$$

Так как $\pi_n(K(\mathbb{Z},3)) = 0$ при $n \neq 3$, а $\pi_3(S^3) \to \pi_3(K(\mathbb{Z},3))$ — изоморфизм, получаем наще утверждение. □

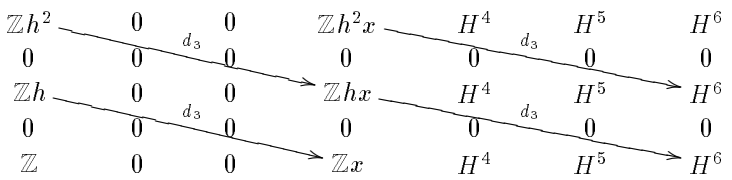
Принадлежащая Серру идея вычисления $\pi_4(S^3)$ состоит в следующем. Так как $\pi_4(S^3) = \pi_4(X)$ — младшая гомотопическая группа X, то по теореме Гуревича она равна $H_4(X)$. С другой стороны, гомологии X можно вычислить с помощью спектральной последовательности расслоения $S^3 \to K(\mathbb{Z},3)$, если известны гомологии $K(\mathbb{Z},3)$. На самом деле, спектральную последовательность удобнее использовать для вычисления когомологий (ввиду наличия мультипликативной структуры), а гомологии получать по формулам универсальных коэффициентов.

Лемма 2.2. *Когомологии пространства $K(\mathbb{Z},3)$ имеют вид $H^\bullet(K(\mathbb{Z},3)) = \mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 0 \oplus \mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 0 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \dots$.*

Доказательство: рассмотрим расслоение путей $EK(\mathbb{Z},3) \to K(\mathbb{Z},3)$. Его слой равен $\Omega K(\mathbb{Z},3) = K(\mathbb{Z},2)$, так как $EK(\mathbb{Z},3)$ стягиваемо, и из гомотопической последовательности этого расслоения следует $\pi_n(\Omega K(\mathbb{Z},3)) = \pi_{n+1}(K(\mathbb{Z},3))$. С другой стороны, все пространства типа $K(\mathbb{Z},2)$ слабо эквивалентны, а одним из пространств $K(\mathbb{Z},2)$ является пространство $\mathbb{CP}^\infty$! (Это следует из гомотопической последовательности расслоения Хопфа $S^\infty \to \mathbb{CP}^\infty$ и стягиваемости сферы S^∞.) Следовательно, кольцо когомологий пространства $K(\mathbb{Z},2)$ равно кольцу $\mathbb{Z}[h]$, где $h \in H^2(K(\mathbb{Z},2))$. Рассмотрим спектральную последовательность расслоения $EK(\mathbb{Z},3) \to K(\mathbb{Z},3)$. Ее второй член имеет вид $E_2^{p,q} = H^q(K(\mathbb{Z},3), H^p(K(\mathbb{Z},2)) = H^q(K(\mathbb{Z},3)) \otimes H^p(K(\mathbb{Z},2))$.



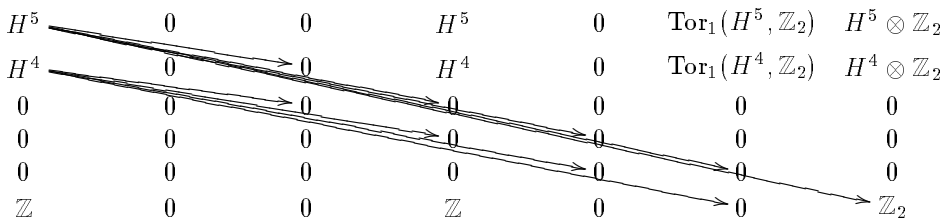
где $H^q = H^q(K(\mathbb{Z},3))$. С другой стороны, пространство $EK(\mathbb{Z},3)$ стягиваемо, поэтому $E_\infty^{p,q} = 0$ при $(p,q) \neq (0,0)$. Отсюда получаем $H^1 = H^2 = 0$, $H^3 = \mathbb{Z}$ и порождается элементом $x = d_3^{2,0}(h)$.



Заметим, что по правилу Лейбница $d_3(h^2) = 2hd_3(h) = 2hx$, поэтому $H^4 = H^5 = 0$, а $H^6 \cong \mathbb{Z}_2$. □

Лемма 2.3. *Когомологии пространства X имеют вид $H^\bullet(X) = \mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \dots$.*

Доказательство: по теореме Гуревича $\pi_n(X) = 0$ при $n < 4$, поэтому $H_n(X) = 0$ при $n < 4$, поэтому по формулам универсальных коэффициентов $H^n(X) = 0$ при $n < 4$. Рассмотрим спектральную последовательность расслоения $S^3 \to K(\mathbb{Z},3)$. Ее второй член имеет вид $E_2^{p,q} = H^q(K(\mathbb{Z},3), H^p(X))$.



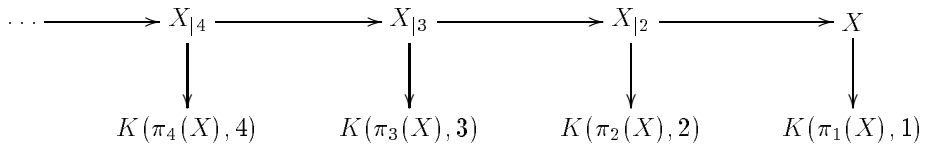
где $H^p = H^p(X)$. С другой стороны, $H^n(S^3) = 0$ при $n \neq 0, 3$, поэтому $E_\infty^{p,q} = 0$ при $p + q \neq 0, 3$. Отсюда сразу получаем $H^4(X) = 0$ и $H^5(X) = \mathbb{Z}_2$. □

Применяя формулу универсальных коэффициентов получаем $H_4(X) = \mathrm{Ext}^1(H^5(X),\mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$. Теперь из теоремы Гуревича следует

Теорема 2.4. *Группа $\pi_4(S^3)$ равна $\mathbb{Z}_2$.*

Часть 3. Вычисления гомотопических групп

Сформулируем теперь метод Серра вычисления гомотопических групп в более общем виде. Рассмотрим связное топологическое пространство X. Так как $\pi_0(X) = 0$, то найдется расслоение $X \to K(\pi_1(X), 1)$, индуцирующее изоморфизм групп π_1. Обозначим через $X_{|2}$ его слой. Тогда из гомотопической последовательности расслоения следует, что $\pi_n(X_{|2}) = 0$ при $n \leqslant 1$, и $\pi_n(X_{|2}) = \pi_n(X)$ при $n \geqslant 2$. Следовательно, найдется расслоение $X_{|2} \to K(\pi_2(X), 2)$, индуцирующее изоморфизм групп π_2. Обозначим через $X_{|3}$ его слой. Тогда из гомотопической последовательности расслоения следует, что $\pi_n(X_{|3}) = 0$ при $n \leqslant 2$, и $\pi_n(X_{|3}) = \pi_n(X_{|2}) = \pi_n(X)$ при $n \geqslant 3$. Продолжая подобным образом получаем диаграмму



в которой пространство $X_{|n+1}$ является гомотопическим слоем отображения $X_{|n} \to K(\pi_n(X), n)$. Пространство $X_{|n}$ называется n-ым убивающим пространством для X, а верхняя строка диаграммы — башней Постникова пространства X. Заметим, что по построению

$$\pi_m(X_{|n}) = 0 \text{ при } m < n \text{ и } \pi_m(X_{|n}) = \pi_m(X) \text{ при } m \geqslant n.$$

Предположим теперь, что нам известны (ко)гомологии пространств $K(\pi, n)$ для всех групп π и всех n. Для односвязного пространства X алгоритм вычисления гомотопических групп пространства X по его группам когомологий сводится к следующему:

0) если X односвязно, то $X_{|2} = X$;
1) $\pi_2(X) = H_2(X)$, а $H_2(X)$ вычисляем по формулам универсальных коэффициентов;
2) вычисляем $H^\bullet(X_{|3})$ с помощью спектральной последовательности расслоения $X_{|2} \to K(\pi_2(X), 2)$;
3) $\pi_3(X) = \pi_3(X_{|3}) = H_3(X_{|3})$, а $H_3(X_{|3})$ вычисляем по формулам универсальных коэффициентов;
4) вычисляем $H^\bullet(X_{|4})$ с помощью спектральной последовательности расслоения $X_{|3} \to K(\pi_3(X), 3)$;
5) и так далее

Здесь возникает две проблемы. Во-первых, надо знать когомологии пространств $K(\pi, n)$. Вычислять эти когомологии можно индукцией по n пользуясь спектральной последовательнстью расслоения $EK(\pi, n) \to K(\pi, n)$, слой которого равен $\Omega K(\pi, n) \cong K(\pi, n-1)$ и тем, что пространства $K(\pi, 1)$ для абелевых групп π хорошо известны (всякая конечно порожденная абелева группа имеет вид $\oplus\mathbb{Z}_{k_i}$, $K(\oplus\mathbb{Z}_{k_i}, 1) \cong \prod K(\mathbb{Z}_{k_i}, 1)$, а $K(\mathbb{Z}_k, 1) = L^\infty_k$ (линзовое пространство), $K(\mathbb{Z}, 1) = S^1$). Вторая проблема состоит в том, что для вычисления спектральной последовательности расслоения использования только мультпликативной структуры оказывается не достаточно. К счастью, в когомологиях помимо умножения существуют и другие естественные операции (когомологические операции). Использование когомологических операций позволяет значительно продвинуться в описании гомотопических групп сфер.

Здесь уместно сказать о стабильных гомотопических группах. Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ рассмотрим последовательность гомотопических групп $\ldots \xrightarrow{\Sigma} \pi_{n-1+k}(S^{n-1}) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{n+k}(S^n) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{n+1+k}(S^{n+1}) \xrightarrow{\Sigma} \ldots$ По теореме Фрейденталя отображения Σ становятся изоморфизмами при $n \geqslant k+2$ (иначе говоря, последовательность стабилизируется). Таким образом, группа $\pi_{n+k}(S^n)$ не зависит от n при $n \gg 0$. Эта группа называется k-ой стабильной гомотопической группой сфер и обозначается π^S_k.

Группа π^S_k абелева при всех k. Нам известно, что при $k < 0$ имеем $\pi^S_k = 0$. Кроме того, $\pi^S_0 = \mathbb{Z}$, а $\pi^S_1 = \mathbb{Z}_2$. В следующей таблице приведены стабильные гомотопические группы сфер в малых размерностях

π^S_2	π^S_3	π^S_4	π^S_5	π^S_6	π^S_7	π^S_8	π^S_9	π^S_{10}	π^S_{11}	π^S_{12}	π^S_{13}
$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{240}$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_{504}$	0	$\mathbb{Z}_3$

Для неодносвязных пространств есть еще две проблемы. Во-первых, группу $\pi_1(X)$ нельзя вычислить по когомологиям пространства X (можно лишь вычислить присоединенные факторы ее фильтрации коммутантами). Во-вторых, даже если фундаментальная группа известна, для вычисления когомологий пространства $X_{|2}$ (универсальной накрывающей пространства X) не достаточно информации о когомологиях X с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ — нужно знать когомологии X с коэффициентами в локальной системе $\mathbb{Z}^{\pi_1(X)}$.