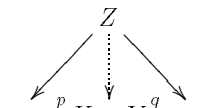
Гомотопическая последовательность расслоения

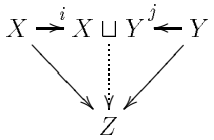
Часть 1. Корасслоения

Всякое категорное утверждение можно записать с помощью коммутативных диаграмм. Операция «обращения» стрелок позволяет получать «двойственное» утверждение. Например,

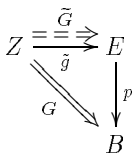
универсальное свойство прямого произведения: $C(Z, X \times Y) = C(Z, X) \times C(Z, Y)$ можно записать в виде диаграммы



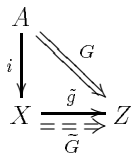
обращая стрелки, получаем $C(X \sqcup Y, Z) = C(X, Z) \times C(Y, Z)$, универсальное свойство несвязного объединения



Аналогично, если изображать гомотопию двойной стрелкой, то определение расслоения можно записать в виде диаграммы



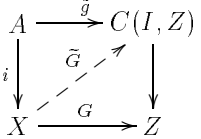
Дуализируя, получаем определение «корасслоения»



Поскольку гомотопия из A или X в Z — это отображение $A \to C(I, Z)$ или $X \to C(I, Z)$, соответственно, определение корасслоения можно переписать следующим образом:

Определение 1.1. Морфизм $i : A \to X$ называется корасслоением, если для него выполянется свойство продолжения гомотопии (EHP)

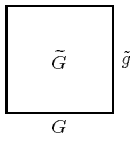
(EHP) *если* $G : X \to Z$ *— непрерывно, а* $\tilde{g} : A \times I \to Z$ *— гомотопия, такая что* $G(i(a)) = \tilde{g}(a, 0)$*, то существует гомотопия* $\widetilde{G} : X \times I \to Z$*, такая что* $\widetilde{G}(x, 0) = G(x)$ *и* $\widetilde{G}(i(a), t) = \tilde{g}(a, t)$*:*



Пусть A — топологическое пространство. Положим $X = A \times I$, $i(a) = (a, 1)$.

Лемма 1.2. *Морфизм* $i : A \to X$ *является корасслоением.*

Доказательство: заметим, что $C(A, C(I, Z)) = C(A \times I, Z)$ и $C(A \times I, C(I, Z)) = C(A \times I \times I, Z)$. Фактически, перед нами задача: продолжить функцию, определенную на правой и нижней стороне квадрата до функции $\widetilde{G}$, определенной на всем квадрате. Кроме того, удобно потребовать, чтобы эта функция была постоянной на левой стороне. Добиться этого можно, например, так:



$$\widetilde{G}(z, t, \tau) = \begin{cases} G(z, t(1+\tau)), & \text{при } t(1+\tau) \leqslant 1, \\ \tilde{g}(z, t(1+\tau) - 1), & \text{при } t(1+\tau) \geqslant 1. \end{cases}$$

□

Лемма 1.3. *Всякое отображение гомотопически эквивалентно корасслоению.*

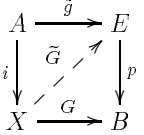
Доказательство: положим $X_1 = X$, $Y_1 = \mathrm{Cyl}(f)$, и определим $f_1(x) = (x, 1)$, $\varphi = \mathrm{Id}$, ψ — проекция из $\mathrm{Cyl}(f)$ на Y. То, что f_1 является корасслоением доказывется аналогично лемме 1.2: если $H : Y \to Z$ — отображение, такое что $H(f(x)) = G(x, 0)$, то определим $\widetilde{H} : Y \times I \to Z$ формулой $\widetilde{H}(y, \tau) = H(y)$. То, что φ — гомотопическая эквивалентность — очевидно. Покажем, что ψ — гомотопическая эквивалентность. Пусть $\psi' : Y \to Y_1$ — стандартное вложение. Тогда $\psi \circ \psi' = \mathrm{Id}_Y$, а $\psi' \circ \psi$ — проекция цилиндра на основание. Определим гомотопию $\Psi : Y_1 \times I \to Y_1$ формулами $\Psi(x, t, T) = (x, t(1 - T))$, $\Psi(y, T) = y$. □

Таким образом, циллиндр $A \times I$ двойственнен функционалному пространству $C(I, B)$, а циллиндр отображения $\mathrm{Cyl}(A \to X)$ — расслоенному произведению $C(I, B) \times_B E$.

Часть 2. Продолжение накрывающей гомотопии

Теорема 2.1 (теорема о подъеме). *Пусть $p : E \to B$ — расслоение, а $i : A \to X$ — корасслоение.*

Пусть $\tilde g : A \to E$ и $G : X \to B$ — отображения, такие что $p \circ \tilde g = G \circ i$. Если либо i либо p — гомотопическая эквивалентность, то существует отображение $\widetilde G : X \to E$, такое что $\widetilde G \circ i = \tilde g$, $p \circ \widetilde G = G$.



Замечание 2.2. Для стандартного корасслоения $A \to A \times I$ утверждение теоремы равносильно определению расслоения, а для стандартного расслоения $C(I, B) \to B$ — определению корасслоения.

Мы докажем теорему только в случае: $X = I^n \times I$, $A = I^n \times 0 \cup (\partial I^n) \times I$.

Доказательство: выберем точку x_0 над верхним основанием куба X, например $x_0 = (1/2, \dots, 1/2, 3/2)$. Обозначим через $x \mapsto r(x)$ проекцию $X \to A$ из точки x_0, а через $\vec v(x)$ — вектор $x_0 - r(x)$. Заметим, что проекция $x \to r(x)$ неподвижна на A и только на A. Определим функцию $\varphi(x)$ формулой

$$x = r(x) + \varphi(x)\vec v(x),$$

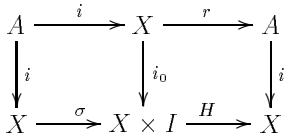
а отображения $H : X \times I \to X$ и $\sigma : X \to X \times I$ формулами

$$H(x,t) = \begin{cases} r(x) + t\vec v(x), & \text{при } t \leqslant \varphi(x) \\ x, & \text{при } t \geqslant \varphi(x) \end{cases} \qquad \sigma(x) = (x, \varphi(x)).$$

Иначе говоря, точка движется прямолинейно и равномерно от точки $r(x)$ к точке x, достигая ее в момент времени $\varphi(x)$, после чего останавливается. Заметим, что для всех $a \in A$

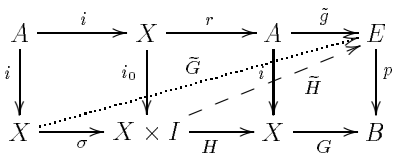
$$r(a) = a, \quad \varphi(a) = 0, \quad H(a,t) \equiv a, \quad \sigma(a) = (a, 0).$$

Кроме того, $H(x, 0) = r(x)$ для всех x. Таким образом, имеем коммутативную диаграмму



причем $\quad r \circ i = \mathrm{Id}_A$, $\quad H \circ \sigma = \mathrm{Id}_X$

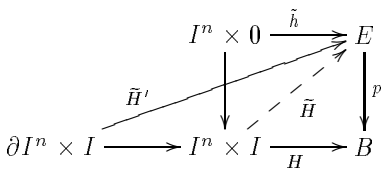
Воспользуемся теперь определением расслоения. Так как $p \circ (\tilde g \circ r) = G \circ i \circ r = (G \circ H) \circ i_0$, то найдется $\widetilde H : X \times I \to E$, такая что $\widetilde H \circ i_0 = \tilde g \circ r$, $p \circ \widetilde H = G \circ H$.



Положим теперь $\widetilde G = \widetilde H \circ \sigma$. Тогда $\widetilde G \circ i = \widetilde H \circ \sigma \circ i = \widetilde H \circ i_0 \circ i = \tilde g \circ r \circ i = \tilde g \circ \mathrm{Id}_A = \tilde g$,
$p \circ \widetilde G = p \circ \widetilde H \circ \sigma = G \circ H \circ \sigma = G \circ \mathrm{Id}_X = G$. □

Следствие 2.3 (теорема о продолжении накрывающей гомотопии). *Пусть $p : E \to B$ — расслоение.*

Для любых $\tilde h : I^n \to E$, $H : I^n \times I \to B$ и $\widetilde H' : \partial I^n \times I \to E$, таких что $p \circ \tilde h = H \circ i_0$, $\widetilde H' \circ i_0 = \tilde h_{|\partial I^n}$ и $p \circ \widetilde H' = H_{|\partial I^n \times I}$, существует $\widetilde H : I^n \times I \to E$, такая что $\widetilde H \circ i_0 = \tilde h$, $\widetilde H_{|\partial I^n \times I} = \widetilde H'$ и $p \circ \widetilde H = H$.



Иначе говоря, если задано отображение $\tilde h : I^n \to E$, гомотопия H отображения $p \circ \tilde h : I^n \to B$ и выбран подъем $\widetilde H'$ гомотопии H на ∂I^n, то найдется накрывающее H продолжение $\widetilde H$ гомотопии $\widetilde H'$ и отображения $\tilde h$.

Часть 3. Гомотопическая последовательность расслоения

Пусть $p : E \to B$ — расслоение с отмеченными точками e_0, b_0, а $F = p^{-1}(b_0)$ — его слой с отмеченной точкой $f_0 = e_0$. Обозначим через $i : F \to E$ — вложение. Рассмотрим элемент группы $\pi_{n+1}(B)$ и представим его отображением $H : I^{n+1} \to B$, преводящим ∂I^{n+1} в b_0. Пусть $\tilde{h} : I^n \times 0 \cup \partial I^n \times I$ — постоянное отображение в точку e_0. По теореме 2.1 найдется отображение $\widetilde{H} : I^{n+1} \to E$, накрывающее H и продолжающее $\tilde{h}$. Пусть $h = \widetilde{H}_{|I^n \times 1}$. Так как $H_{|I^n \times 1} \equiv b_0$, то h — отображение $I^n \to F$. Так как $\widetilde{H}_{|\partial I^n \times I} \equiv e_0$, то $h_{|\partial I^n} \equiv e_0$, значит h определяет элемент группы $\pi_n(F)$.

Предложение 3.1. *Отображение $H \to h$ задает гомоморфизм групп $\pi_{n+1}(B) \to \pi_n(F)$.*

Доказательство: Действительно, пусть H^1 — сфероид, гомотопный сфероиду $H^0 = H$, и пусть $H^t : I^{n+1} \times I \to B$ — гомотопия, неподвижная на $\partial I^{n+1} \times I$. Пусть $\widetilde{H}^0$ и $\widetilde{H}^1$ — гомотопии $I^n \times I \to E$, накрывающие H^0 и H^1 и постоянные на $I^n \times 0 \cup \partial I^n \times I$. Пусть $\tilde{h}^t$ отображает $I^n \times 0 \times I \cup \partial I^n \times I \times I$ в точку e_0, а на гранях $I^n \times I \times 0$ и $I^n \times I \times 1$ совпадает с $\widetilde{H}^0$ и $\widetilde{H}^1$ соответственно. По теореме 2.1 найдется отображение $\widetilde{H}^t : I^{n+1} \times I \to E$, накрывающее H^t и продолжающее $\tilde{h}^t$. Ясно, что $h^t = \widetilde{H}^t_{|I^n \times 1 \times I}$ является гомотопией из $h^0 = \widetilde{H}^0_{|I^n \times 1} = \widetilde{H}^t_{|I^n \times 1 \times 0}$ в $h^1 = \widetilde{H}^1_{|I^n \times 1} = \widetilde{H}^t_{|I^n \times 1 \times 1}$. Причем, поскольку $H^t_{|I^n \times 1 \times I} \equiv b_0$, то $h^t : I^n \times I \to F$. Наконец, ясно, что h^t неподвижна на $\partial I^n \times I$. Значит h^0 и h^1 представляют одинаковые элементы в $\pi_n(F)$.

Гомоморфность проверяется очевидно. Ясно, что если $\widetilde{H}^1$ накрывает H^1, а $\widetilde{H}^2$ — накрывает H^2, то $\widetilde{H}^1 \cdot \widetilde{H}^2$ накрывает $H^1 \cdot H^2$, при этом $(\widetilde{H}^1 \cdot \widetilde{H}^2)_{|I^n \times 1} = (\widetilde{H}^1_{|I^n \times 1}) \cdot (\widetilde{H}^2_{|I^n \times 1})$. □

Обозначим построенный гомоморфизм групп через ∂.

Теорема 3.2. *Следующая последовательность множеств с отмеченными точками точна (то есть ядро каждого гомоморфизма совпадает с образом предыдущего гомоморфизма):*

$$\ldots \xrightarrow{i_*} \pi_{n+1}(E) \xrightarrow{p_*} \pi_{n+1}(B) \xrightarrow{\partial} \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial} \ldots$$

Доказательство: проверим вначале, что композиции стрелок тривиальны. Во-превых, $p_* \circ i_* = (p \circ i)_*$ — тривиально. Во-вторых, если $G \in \pi_{n+1}(E)$ и $H = p_*(G)$, то в качестве $\widetilde{H}$ можно выбрать G, поэтому $h = \widetilde{H}_{I^n \times 1} = G_{I^n \times 1} = e_0$, то есть $\partial \circ p_*$ — трививально. Наконец, по построению ∂H гомотопно тривиальному сфероиду в E, поэтому $i_* \circ \partial$ — тривиально.

Проверим теперь точность. Пусть $G \in \pi_n(E)$ и сфероид $p \circ G$ гомотопен тривиальному. Пусть $H : I^n \times I \to B$ — гомотопия $p \circ G \sim b_0$. Найдем накрывающую гомотопию $\widetilde{H} : I^n \times I \to E$, продолжающую отображение $\tilde{h}$, отображающее $\partial I^n \times I$ в e_0 и совпадающее на $I^n \times 0$ с G. Так как $H_{|I^n \times 1} \equiv b_0$, то $\widetilde{H}_{|I^n \times 1}$ — сфероид $G' \in \pi_n(F)$, причем $\widetilde{H}$ осуществляет гомотопию $G \sim G'$. Значит $G = i_* G'$.

Пусть теперь $H \in \pi_{n+1}(B)$ и $\partial H = 0$ в $\pi_n(F)$. Это означает, что найдется накрывающее H отображение $\widetilde{H} : I^n \times I \to E$, такое что $\widetilde{H}_{|\partial I^n \times I \cup I^n \times 0} \equiv e_0$, и $\widetilde{H}_{|I^n \times 1} \sim e_0$ в F. Выберем гомотопию $\widetilde{G} : I^n \times I \to F$, такую что $\widetilde{G}_{|I^n \times 0} = \widetilde{H}_{|I^n \times 1}$, $\widetilde{G}_{|\partial I^n \times I \cup I^n \times 1} = e_0$. Тогда $\widetilde{H} \cdot \widetilde{G}$ — сфероид в E, а $p_*(\widetilde{H} \cdot \widetilde{G}) = H \cdot b_0 \sim H$, так как $p \circ \widetilde{G} \equiv b_0$. Значит $H = p_*(\widetilde{H} \cdot \widetilde{G})$.

Наконец, пусть $G \in \pi_n(F)$, $i_*(G) \sim e_0$ в E. Значит существует гомотопия $\widetilde{H} : I^n \times I \to E$, такая что $\widetilde{H}_{|I^n \times 1} = G$, а $\widetilde{H}_{|\partial I^n \times I \cup I^n \times 1} = e_0$. Тогда если $H = p \circ \widetilde{H}$, то $H \in \pi_{n+1}(B)$ и $G = \partial H$. □

Пример 3.3. Пусть $E = \mathbb{R}$, $B = S^1$, а $p : \mathbb{R} \to S^1$ — отображение «наматывания». Тогда $F = \mathbb{Z}$. Так как F — дискретно, то $\pi_n(F) = 0$ при $n \geqslant 1$ и $\pi_0(F) = F = \mathbb{Z}$. Кроме того, $\mathbb{R}$ — стягиваемо, поэтому $\pi_n(\mathbb{R}) = 0$ при $n \geqslant 1$ и $\pi_0(\mathbb{R}) = *$. Значит $\pi_n(S^1) = \pi_n(\mathbb{R}) = 0$ при $n \geqslant 2$, а из точной последовательности

$$0 = \pi_1(\mathbb{R}) \to \pi_1(S^1) \to \pi_0(\mathbb{Z}) \to \pi_0(\mathbb{R}) = *$$

заключаем, что $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Следствие 3.4. *Пусть $f : X \to Y$ — произвольное отображение, а F — его гомотопический слой. Тогда существует точная последовательность*

$$\cdots \to \pi_{n+1}(X) \xrightarrow{f_*} \pi_{n+1}(Y) \to \pi_n(F) \to \pi_n(X) \xrightarrow{f_*} \pi_n(Y) \to \ldots$$

Следствие 3.5. *Для любого пространства Y имеем $\pi_{n+1}(Y) \cong \pi_n(\Omega Y)$.*