Накрытия. Теорема Фрейденталя

Часть 1. Накрытия

Определение 1.1. Локально тривиальное расслоение с дискретным слоем и линейно связным тотальным пространством называется накрытием.

Примеры 1.2. (1) $\mathbb{R} \to S^1$, $x \mapsto e^{2\pi i x}$; (2) $S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^k$; (3) $S^n \to \mathbb{RP}^n$.

Теорема 1.3. *Пусть $p : T \to B$ — накрытие со слоем F. Тогда при $n \geqslant 2$ имеем $\pi_n(B) = \pi_n(T)$, а группа $\pi_1(B)$ транзитивно действует на F, причем стабилизатор точки изоморфен $\pi_1(T)$.*

Доказательство: так как p является расслоением в смысле Гуревича, то, замечая, что $\pi_n(F) = 0$ при $n \geqslant 1$, $\pi_0(F) = F$, получаем $\pi_n(B) = \pi_n(T)$ при $n \geqslant 2$, а при $n = 1$ — точную последовательность

$$1 \to \pi_1(T) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B) \xrightarrow{\partial} F \to *.$$

С другой стороны, ясно, что отображение ∂ задает действие группы $\pi_1(B)$ на F. Точность последовательности справа означает транзитивность действия, а точность слева и в середине — то, что $\pi_1(T)$ является стабилизатором точки. $\square$

Лемма 1.4. *Пусть $p : T \to B$ и $p' : T' \to B$ регулярное накрытия. Отображение $f : T \to T'$, такое что $f(t_0) = t'_0$ и $p' \circ f = p$ существует тогда и только тогда, когда $p_*(\pi_1(T)) \subset p'_*(\pi_1(T'))$. Кроме того, такое отображение единственно.*

Доказательство: произвольную точку $t \in T$ соединим путем s с t_0 и поднимем путь $p \circ s$ до пути s' в T', такого что $s'(0) = t'_0$. Заметим, что для накрытий поднятие единственно (проверьте!). Кроме того, при замене пути s путь $p \circ s$ может только умножиться на элемент группы $p_*(\pi_1(T)) \subset p'_*(\pi_1(T'))$, который при поднятии окажется петлей в T', поэтому $f(t) := s'(1)$ — корректно определенное отображение. Непрерывность, свойство $p' \circ f = p$ и единственность очевидны по построению. $\square$

Определение 1.5. Накрытие $p : T \to B$ называется регулярным, если $p_*(\pi_1(T)) \subset \pi_1(B)$ — нормальная подгруппа.

Лемма 1.6. *Если группа G действует на линейно связном топологическом пространстве T свободно и дискретно (то есть у каждой точки есть окрестность U, такая что $\forall g, h \in G$ $gU \cap hU = \emptyset$), то $p : T \to B = T/G$ — регулярное накрытие и $\pi_1(B)/\pi_1(T) \cong G$.*

Доказательство: из свободности и дискретности действия следует, что p — локально тривиальное расслоение со слоем G. Покажем, что $\partial : \pi_1(B) \to G$ — гомоморфизм групп. Действительно, пусть $\gamma, \gamma' \in \pi_1(B)$, и пусть $\tilde\gamma, \tilde\gamma'$ — их поднятия, начинающиеся в 1 и кончающиеся в $g = \partial(\gamma)$ и $g' = \partial(\gamma')$ соответственно. Так как путь $g\tilde\gamma'$ начинается в g и накрывает γ', то $\tilde\gamma \circ g\tilde\gamma'$ накрывает $\gamma \circ \gamma'$, поэтому $\partial(\gamma \circ \gamma') = (\tilde\gamma \circ g\tilde\gamma')(1) = g\tilde\gamma'(1) = gg'$. $\square$

Лемма 1.7. *Если $p : T \to B$ — регулярное накрытие, то группа $G = \pi_1(B)/\pi_1(T)$ действует свободно и дискретно на T, так что $B = T/G$.*

Доказательство: для каждого элемента $g \in \pi_1(B)/\pi_1(T)$ построим отображение $f_g : T \to T$, такое что $f_g(t_0) = \partial(g)$, $p \circ f_g = p$ (оно существует в силу леммы 1.4, так как подгруппа $p_*(\pi_1(T, \partial(g)) \subset \pi_1(B)$ сопряжена подгруппе $p_*(\pi_1(T, t_0) \subset \pi_1(B)$ и значит совпадает с ней в силу регулярности накрытия. В силу единственности f_g имеем $f_{gg'} = f_g \circ f_{g'}$, поэтому $(g, t) \mapsto f_g(t)$ — искомое действие G на T. $\square$

Предложение 1.8. *Соответствие $T \mapsto p_*(\pi_1(T))$ осуществляет биекцию между классами изоморфизма накрытий пространства B и классами сопряженности подгрупп в группе $\pi_1(B)$. При этом соответствии регулярным накрытиям соответствуют нормальные подгруппы.*

Доказательство: пусть $H \subset \pi_1(B)$ — подгруппа. Рассмотрим пространство $E(B; b_0)$ и отношение

$$s \sim s' \quad \iff \quad s(1) = s'(1) \quad \text{и} \quad s^{-1} \circ s' \in H.$$

Положим $T = E(B; b_0)/\sim$. Для всякого класса путей $s \in T$ и односвязной окрестности U точки $s(1) \in B$ обозначим через $W_{U,s}$ множество всех путей, гомотопных $s \circ s_U$, где $s_U \in E(U; s(1))$. Легко проверить, что множества $W_{U,s}$ образуют базу топологии на T, а отображение $p : T \to B$, $p(s) = s(1)$ — непрерывно, если B локально односвязно. Кроме того, ясно, что $p^{-1}(U) = \sqcup_s W_{U,s}$, где s пробегает классы гомотопности путей из b_0 в какую-либо точку U по модулю H. Поэтому p — накрытие со слоем $\pi_1(B)/H$. Кроме того, очевидно, что стабилизатором точки при естественном действии $\pi_1(B)$ на слое является полгруппа H.

Остается проверить, что накрытия $p : T \to B$ и $p' : T' \to B'$ изоморфны $\iff$ подгруппы $p_*(\pi_1(T))$ и $p'_*(\pi_1(T'))$ сопряжены. Импликация $\Longrightarrow$ очевидна (зависимость π_1 от отмеченной точки). Пусть теперь $p_*(\pi_1(T))$ и $p'_*(\pi_1(T'))$ сопряжены. Меняя отмеченную точку в T', можно считать, что $p_*(\pi_1(T)) = p'_*(\pi_1(T'))$. Применяя лемму 1.4 строим отображения $f : T \to T'$ и $f' : T' \to T$, такие что $f(t_0) = t'_0$, $p' \circ f = p$, $f'(t'_0) = t_0$ и $p \circ f' = p'$. Из той же леммы следует, что $f' \circ f = \mathrm{Id}_T$, $f \circ f' = \mathrm{Id}_{T'}$, то есть T изоморфно T'. □

Определение 1.9. Накрытие $p : T \to B$ называется универсальным, если T односвязно.

Следствие 1.10. *Универсальное накрытие существует и единственно с точностью до изоморфизма. Если $p : T \to B$ — универсальное накрытие, то $B \cong T/\pi_1(B)$, и для любого накрытия $p' : T' \to B$ существует единственное отображение $f : T \to T'$, такое что $p = p' \circ f$.*

Часть 2. Группы $\pi_n(S^m)$ при $n < m$

Лемма 2.1 (о гладкой аппроксимации). *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ и $f : U \to \mathbb{R}^m$ — непрерывно. Для любого компакта $K \subset U$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется полиномиальное отображение $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, т. ч. $\sup_{x\in K} |f(x) - \bar{f}(x)| < \varepsilon$.*

Определение 2.2. Пусть $f : U \to \mathbb{R}^m$ — непрерывное отображение. Точка $y \in \mathbb{R}^m$ называется регулярным значением f, если $\forall x \in f^{-1}(y)$ функция f гладка в x и матрица Якоби $\partial f_i/\partial f_j$ имеет ранг n.

Лемма 2.3 (теорема Сарда). *Множество регулярных значений гладкого отображения всюду плотно.*

Пусть $\sim$ — отношение эквивалентности на S^{m-1}. Продолжим его на D^m.

Пример 2.4. Если $\sim$ на S^{m-1} отождествляет все точки, то $D^m/\sim = S^m$.

Лемма 2.5. *Пусть $f : D^n \to D^m/\sim$ — непрерывное отображение, такое что $f(S^{n-1}) \subset S^{m-1}/\sim$. Тогда найдется отображение $f' : D^n \to D^m$ и неподвижная на S^{n-1} гомотопия $f \underset{F}{\sim} f'$? так что f' имеет регулярные значения.*

Доказательство: пусть $G = f^{-1}(D^m \setminus S^{m-1}/\sim)$. Тогда $G \subset D^n \setminus S^{n-1}$. Рассмотрим $f_{|G}$ как отображение из G в D^m. Положим $\rho(x) = \min_{y\in\partial G} |x - y|$. Так как $f^{-1}(\frac{1}{2}D^m)$ — компакт в G, то $\exists \delta > 0$, так что $\rho(x) \geqslant 2\delta$ на $f^{-1}(\frac{1}{2}D^m)$. Пусть $K = \{\, x \in G \mid \rho(x) \geqslant \delta \,\}$, $K' = \{\, x \in G \mid \rho(x) \geqslant 2\delta \,\}$. Тогда $f^{-1}(\frac{1}{2}D^m) \subset K' \subset K \subset G$. Так как $f(K)$ — компакт, найдется $0 < \varepsilon < 1/4$, такое что ε-окрестность $f(K)$ лежит в $D^m \setminus S^{m-1}$. По теореме о гладкой аппроксимации найдется $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, такая что $\sup_{x\in K} |f(x) - \bar{f}(x)| < \varepsilon$. Положим

$$F(x,t) = \begin{cases} f(x), & \text{при } x \in D^m \setminus K, \\ (1 - t\frac{\rho(x)-\delta}{\delta} f(x) + t\frac{\rho(x)-\delta}{\delta}\bar{f}(x), & \text{при } x \in K \setminus K', \\ (1-t)f(x) + t\bar{f}(x), & \text{при } x \in K'. \end{cases}$$

Если $f'(x) = F(x,1)$, то $f'_{|K'} = \bar{f}(x)$ — гладкая функция. Кроме того, так как $|f(x) - f'(x)| \leqslant \varepsilon$ и $\varepsilon < 1/4$, то $|f'(x)| < 1/4 \Longrightarrow |f(x)| < 1/2 \Longrightarrow x \in K' \Longrightarrow f'(x) = \bar{f}(x)$, поэтому по теореме Сарда $f'(x)$ имеет регулярное значение в $\frac{1}{4}D^m$. □

Следствие 2.6 (лемма о свободной точке). *Пусть $n < m$ и $f : D^n \to D^m/\sim$ — непрерывное отображение, такое что $f(S^{n-1}) \subset S^{m-1}/\sim$. Найдется отображение $f' : D^n \to D^m$ и неподвижная на S^{n-1} гомотопия $f \underset{F}{\sim} f'$, так что $f'(D^n) \neq D^m/\sim$.*

Доказательство: при $n < m$ точка y является регулярным значением для $f' \iff {f'}^{-1}(y) = \emptyset$. □

Теорема 2.7. *Если $n < m$, то $\pi_n(S^m) = 0$.*

Доказательство: пусть $\sim$ — отношение эквивалентности из примера 2.4. Представим сфероид отображением $f : D^n \to S^m = D^m/\sim$, таким что $f(S^{n-1}) = S^{m-1}/\sim$. Согласно лемме о свободной точке, найдется гомотопный f сфероид f', такой что $f'(D^n) \neq S^m$. Пусть $s \in S^m$ не лежит в образе f'. Так как $S^m \setminus s \cong \mathbb{R}^m$ стягиваемо, то f' гомотопен тождественному. □

Следствие 2.8. $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$.

Доказательство: гомотопическая последовательность расслоения Хопфа $S^3 \to S^2$ со слоем S^1 дает $0 = \pi_2(S^3) \to \pi_2(S^2) \to \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^3) = 0$, откуда $\pi_2(S^2) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. □

Часть 3. Теорема Фрейденталя

Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение. Тогда $f \times \mathrm{Id}_I : X \times I \to Y \times I$ переводит основания в основания, и поэтому индуцирует непрерывное отображение надстроек $\Sigma f : \Sigma X \to \Sigma Y$. Если $X = S^n$, то $\Sigma X \cong S^{n+1}$, таким обрзом, если f — n-мерный сфероид в Y, то Σf — $(n+1)$-мерный сфероид в ΣY. Ясно, что $f \sim g$ влечет $\Sigma f \sim \Sigma g$ (применим надстройку к гомотопии), а $\Sigma(f \cdot g) = \Sigma(f) \cdot \Sigma(g)$, поэтому Σ является гомоморфизмом групп $\pi_n(Y) \to \pi_{n+1}(\Sigma Y)$. Он называется гомоморфизм надстройки.

Если $Y = S^m$, то $\Sigma Y \cong S^{m+1}$, таким образом получаем гомоморфизм $\Sigma : \pi_n(S^m) \to \pi_{n+1}(S^{m+1})$.

Теорема 3.1 (теорема Фрейденталя). *Гомоморфизм $\Sigma : \pi_n(S^m) \to \pi_{n+1}(S^{m+1})$ является изоморфизмом при $n \leqslant 2m-2$ и эпиморфизмом при $n = 2m-1$.*

Доказательство эпиморфности: пусть $f : S^{n+1} \to S^{m+1}$ — сфероид. Надо показать, что $f \sim \Sigma g$, где $g : S^n \to S^m$. Будем считать, что $n \geqslant m$.

Шаг 1. Воспользовавшись леммой 2.5 заменим f на гомотопный сфероид, имеющий два регулярных значения $y_1, y_2 \in S^{m+1}$. Шаг 2. Пусть $M_1 = f^{-1}(y_1)$, $M_2 = f^{-1}(M_2)$ по теореме о неявной функции для всякой точки $x \in M_i$ (матрица Якоби имеет ранг $m+1$) найдется окрестность U_x точки x, диффеоморфная открытому шару $\mathring{D}^{n-m}$. Ввиду компактности S^{n+1} и замкнутости M_i мы можем найти конечное покрытие каждого из M_i такими шарами. Шаг 3. Выберем точку $\infty \in S^{n+1}$ не лежащую на M_1 и M_2, и отождествим $S^{n+1} \setminus \infty$ с $\mathbb{R}^{n+1}$ с помощью стереографической проекции. Рассмотрим $\overline{M_1 M_2}$ — объединение всех прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$, соединяющих какую-либо точку M_1 с какой-либо точкой M_2. Тогда $\overline{M_1 M_2}$ можно покрыть конечным числом открытых шаров размерности $2(n-m)+1$. Так как из $n \leqslant 2m-1$ следует $2(n-m)+1 < n+1$, то найдется точка $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, не лежащая в $\overline{M_1 M_2}$ и отделенная от M_1 некоторой гиперплоскостью H. Шаг 4. Рассмотрим следующую гомотопию пространства $\mathbb{R}^{n+1}$: каждая точка движется прямолинейно к x, скорость пропорциональна расстоянию до x, а коэффициент пропорционалности — свой на каждом луче, причем на лучах, проходящих через M_1 он равен нулю, а на лучах, проходящих через M_2 — положителен. Через конечное время, M_1 и M_2 окажутся по разные стороны от H. Шаг 5. Считая точки y_1 и y_2 — полюсами сферы S^{m+1}, а H — экватором сферы S^{n+1}, мы получаем сфероид f', гомотопный f и такой, что полюса переходят в полюса, а прообразы окрестностей полюсов лежат в соответствующих полушариях. Растянем эти окрестности на свои полушарие, сжимая все остальное на экватор. Шаг 6. Таким образом мы получаем сфероид f', гомотопный f и такой, что экватор переходит в экватор. Растянем теперь экватор в S^{m+1} на полушария вдоль меридианов. □

Доказательство мономорфности: пусть $g, g' : S^n \to S^m$ — сфероиды и $\Sigma g \sim \Sigma g'$, а $F : S^{n+1} \times I \to S^m$ — гомотопия. Надо показать, что F можно продеформировать в гомотпию вида ΣG, где $G : S^n \times I \to S^m$. Доказательство совершенно аналогично эпиморфности: считаем, что полюса являются регулярными значениями, разводим их прообразы по разные стороны от экватора $S^n \times I$ (здесь используется неравенство $n \leqslant 2m-2$), делаем так, что экватор переходит в экватор, и растягиваем экватор на всю сферу. □

Следствие 3.2 (теорема Хопфа). *Имеем $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$.*