Когомологии

Часть 1. Аксиоматическое определение теории когомологий

Теория гомотопических групп дает последовательность ковариантных функторов π_n (всякому пространству X сопоставляется $\pi_n(X)$, а всякому отображению $f : X \to Y$ — гомоморфизм $f_* : \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$), а также гомоморфизмы $\partial : \pi_n(B) \to \pi_{n-1}(F)$ для всякого расслоения $E \to B$ со слоем F, причем

свойство гомотопии: если $f \sim g : X \to Y$, то $f_* = g_* : \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$;
свойство точности: гомотопическая последовательность расслоения точна;
свойство размерности: $\pi_n(*) = 0$ при $n \neq 0$ и $\pi_0(*) = *$.

Сформулируем свойства двойственного понятия в качестве аксиом. Теорией когомологий называется последовательность контравариантных функторов H^n из категории топологических пространств в категорию абелевых групп (всякому пространству X сопоставляется абелева группа $H^n(X)$, а всякому отображению $f : X \to Y$ — гомоморфизм $f^* : H^n(Y) \to H^n(X)$), а также гомоморфизмов $\delta : H^n(A) \to H^{n+1}(C)$ (связывающий гомоморфизм) для всякого корасслоения $A \to X$ с кослоем C, таких что выполняются

аксиома гомотопии: если $f \sim g : X \to Y$, то $f^* = g^* : H^n(Y) \to H^n(X)$;
аксиома точности: если $A \xrightarrow{i} X$ — корасслоение с кослоем $X \xrightarrow{p} C$, то последовательность точна

$$0 \to \widetilde{H}^0(C) \xrightarrow{p^*} H^0(X) \xrightarrow{i^*} H^0(A) \xrightarrow{\delta} \ldots \xrightarrow{i^*} H^{n-1}(A) \xrightarrow{\delta} H^n(C) \xrightarrow{p^*} H^n(X) \xrightarrow{i^*} H^n(A) \xrightarrow{\delta} \ldots$$

аксиома размерности: $H^n(*) = 0$ при $n \neq 0$ и $H^0(*) = \mathbb{Z}$.

Здесь $\widetilde{H}^0(X) := H^0(X)/H^0(*)$ (вложение $H^0(*) \to H^0(X)$ индуцируется проекцией $X \to *$), а кослоем корасслоения $i : A \to X$ называется факторпространство X/A.

Теорема 1.1. *Теория когомологий существует и единственна.*

Доказательство теоремы начнем с явного построения теории, удовлетворяющей перечисленным аксиомам.

Часть 2. Комплексы

Определение 2.1. Комплексом абелевых групп называется (конечная или бесконечная) последовательность абелевых групп и гомоморфизмов

$$\ldots \xrightarrow{d^{i-1}} C^i \xrightarrow{d^i} C^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} C^{i+2} \xrightarrow{d^{i+2}} \ldots, \qquad \text{в которой } \boxed{d^{i+1} \circ d^i = 0} \text{ для всех } i \in \mathbb{Z}.$$

Пространство C^i называется i-ым членом комплекса $(C^\bullet, d^\bullet)$, а гомоморфизм d^i — i-ым дифференциалом.

Такие комплексы называют когомологическими. Помимо них используются и гомологические комплексы, которые отличаются тем, что в них дифференциал понижает градуировку (градуировка в гомологических комплексах обозначается нижним индексом). Аналогично определяются комплексы векторных пространств, модулей над кольцом и т.д.

Определение 2.2. Пусть $(C^\bullet, d^\bullet)$ — комплекс абелевых групп. Подгруппы $Z^i = \operatorname{Ker} d^i \subset C^i$ и $B^i = \operatorname{Im} d^{i-1} \subset C^i$ называются группой i-коциклов и группой i-кограниц соответственно.

Лемма 2.3. *Всякая кограница является коциклом, то есть $B^i \subset Z^i$.*

Доказательство: $c \in B^i \implies c = d^{i-1}(c') \implies d^i(c) = d^i(d^{i-1}(c')) = (d^i \circ d^{i-1})(c') = 0 \implies c \in Z^i$. □

Определение 2.4. Факторгруппа $H^i = H^i(C^\bullet, d^\bullet) := Z^i/B^i$ называется группой i-ых когомологий комплекса $(C^\bullet, d^\bullet)$. Для гомологического комплекса $(C_\bullet, d_\bullet)$ аналогичным образом определяется понятие циклов $Z_i = \operatorname{Ker} d_i$, границ $B_i = \operatorname{Im} d_{i+1}$ и гомологий $H_i = H_i(C_\bullet, d_\bullet) := Z_i/B_i$.

Определение 2.5. Морфизмом комплексов $f^\bullet : E^\bullet \to F^\bullet$ называется набор морфизмов $f^i : E^i \to F^i$, такой что $d_F^i \circ f^i = f^{i+1} \circ d_E^i$ для всех i.

Лемма 2.6. *Если $f^\bullet : E^\bullet \to F^\bullet$ — морфизм комплексов, то $f^i(Z^i(E^\bullet)) \subset Z^i(F^\bullet)$, $f^i(B^i(E^\bullet)) \subset B^i(F^\bullet)$.*

Доказательство: если $e \in Z^i(E^\bullet)$, то $d_F^i(f^i(e)) = f^{i+1}(d_A^i(e)) = 0$, то есть $f^i(e) \in Z^i(F^\bullet)$. Если же $e \in B^i(E^\bullet)$, то есть $e = d_E^{i-1}(e')$, то $f^i(e) = f^i(d_A^{i-1}(e')) = d_B^{i-1}(f^{i-1}(e')) \in B^i(F^\bullet)$. □

Пусть $f^\bullet : E^\bullet \to F^\bullet$ — морфизм копмлексов, а $h \in H^i(E^\bullet) = Z^i(E^\bullet)/B^i(E^\bullet)$ — класс когомологий. Выберем коцикл $e \in Z^i(E^\bullet)$, представляющий класс h и рассмотрим элемент $f^i(e) \in F^i$. Согласно предыдущей лемме $f^i(e)$ является коциклом, причем при замене коцикла e другим коциклом, представляющим тот же класс когомологий, коцикл $f^i(e)$ изменится на кограницу. Следовательно, класс когомологий коцикла $f^i(e)$ зависит лишь от класса h. Таким образом, всякий морфизм комплексов индуцирует морфизм когомологий $H^i(E^\bullet) \to H^i(F^\bullet)$, который обозначается $H^i f^\bullet$.

Определение 2.7. Морфизмы комплексов $f, g : E^\bullet \to F^\bullet$ называются гомотопными, если найдется набор морфизмов $h^i : E^i \to F^{i-1}$, такой что $g^i - f^i = h^{i+1} d_E^i + d_F^{i-1} h^i$.

Лемма 2.8. *Гомотопные морфизмы комплексов индуцируют одинаковые отображения на когомологиях.*

Доказательство: если $d_E^i(e) = 0$, то $g^i(e) - f^i(e) = h^{i+1} d_E^i(e) + d_F^{i-1} h^i(e) = d_F^{i-1}(h^i(e))$. Значит $g^i(e)$ и $f^i(e)$ отличаются на кограницу, то есть задают один и тот же класс когомологий. □

Часть 3. Сингулярные когомологии

Определение 3.1. Сингулярным симплексом размерности n в топологическом пространстве X называется любое непрерывное отображение $\sigma : \Delta^n \to X$, где $\Delta^n = \{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geqslant 0,\ \sum x_i = 1 \}$ — стандартный симплекс.

Рассмотрим свободную абелеву группу $C_n(X)$, порожденную множеством всех n-мерных сингулярных симплексов в X. Ее элементы — формальные линейные комбинации сингулярных симплексов с целыми коэффициентами, называемые также цепями.

У стандартного n-мерного симплекса $n+1$ вершина (k-ая вершина задается равенством $x_k = 1$), и $n+1$ грань (k-ая грань задается уравнением $x_k = 0$). Каждая грань гомеоморфна $(n-1)$-мерному симплексу:

$$i_k : \Delta^{n-1} \to \Delta^n, \qquad (y_0, \dots, y_{n-1}) \mapsto (y_0, \dots, y_{k-1}, 0, y_k, \dots, y_{n-1}).$$

Рассмотрим гомоморфизмы

$$\partial_n^k, \partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X), \qquad \partial_n^k(\sum a_i \sigma_i) = \sum a_i(\sigma_i \circ i_k), \qquad \partial_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \partial_n^k.$$

Лемма 3.2. (i) *При $k < l$ имеем $\partial_{n-1}^k \circ \partial_n^l = \partial_{n-1}^{l-1} \circ \partial_n^k$.* (ii) *При всех n имеем $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.*

Доказательство: первое равенство проверяется непосредственно — обе части являются ограничением симплекса σ на $(n-2)$-мерную грань, задаваемую уравнениями $x_k = x_l = 0$. Далее заметим, что

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = \sum_{k<l} (-1)^{k+l} \partial_{n-1}^k \circ \partial_n^l + \sum_{k \geqslant l} (-1)^{k+l} \partial_{n-1}^k \circ \partial_n^l = \sum_{k<l} (-1)^{k+l} \partial_{n-1}^k \circ \partial_n^l + \sum_{k \geqslant l} (-1)^{k+l} \partial_{n-1}^l \circ \partial_n^{k+1}$$

и ясно, что слагаемое (k, l) из первой суммы сокращается со слагаемым $(l-1, k)$ из второй суммы. □

Рассмотрим теперь группу сингулярных коцепей $C^n(X) = \mathrm{Hom}(C_n(X), \mathbb{Z})$ и отображения

$$\delta^n : C^n(X) \to C^{n+1}(x), \qquad (\delta^n c)(a) = c(\partial_{n+1} a), \quad c \in C^n(X),\ a \in C_{n+1}(x).$$

Лемма 3.3. *Имеем $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$.*

Доказательство: $((\delta^{n+1} \circ \delta^n)c)(a) = (\delta^n c)(\partial_{n+2} a) = c((\partial_{n+1} \circ \partial_{n+2})a) = 0$. □

Пусть $f : X \to Y$ — морфизм топологических пространств. Всякому сингулярному симплексу $\sigma : \Delta^n \to X$ сопоставим сингулярный симплекс $f \circ \sigma : \Delta^n \to Y$. Получаем гомоморфизмы групп $f_n : C_n(X) \to C_n(Y)$ и $f^n : C^n(Y) \to C^n(X)$ (который задается формулой $(f^n c)(a) = c(f_n a)$).

Лемма 3.4. *Морфизмы $f_\bullet : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$ и $f^\bullet : C^\bullet(Y) \to C^\bullet(X)$ являются морфизмами комплексов.*

Доказательство: $f_{n-1}(\partial_n \sigma) = \sum(-1)^k f \circ \sigma \circ i_k = \partial_n(f_n\sigma)$, то есть $f_\bullet$ — морфизм комплексов. Далее $(f^{n+1}\delta^n c)(a) = (\delta^n c)(f_{n+1}a) = c(\partial_{n+1} f_{n+1} a) = c(f_n \partial_{n+1} a) = (f^n c)(\partial_{n+1} a) = (\delta^n f^n c)(a)$.

Определение 3.5. Группа $H^n_{\mathrm{sing}}(X) := H^n(C^\bullet(X), \delta^\bullet)$ называется группой n-мерных сингулярных когомологий пространства X.

Предложение 3.6. *Сопоставление $X \mapsto H^n_{\mathrm{sing}}(X)$ — функтор в категорию абелевых групп.*

Доказательство: для отображения $f : X \to Y$ обозначим через $f^* : H^n_{\mathrm{sing}}(Y) \to H^n_{\mathrm{sing}}(X)$ морфизм, индуцированный морфизмом комплексов $f^\bullet : C^\bullet(Y) \to C^\bullet(X)$. Ясно, что $\mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}$ и $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$. $\square$

Предложение 3.7 (аксиома гомотопии). *Если $f \sim g : X \to Y$ — гомотопные отображения, то $f^* = g^*$.*

Доказательство: пусть $h : X \times I \to Y$ — гомотопия. Рассмотрим призму $\Delta^n \times I$ и разобьем ее на $(n+1)$-мерные симплексы следующим образом: $\Delta^n \times I = \{ (x_0, \dots, x_n, t) \mid (x_0, \dots, x_n) \in \Delta^n,\ t \in I \} = \bigsqcup_{k=0}^n T^n_k$, где $T^n_k = \{ (x_0, \dots, x_n, t) \mid \sum_{i=0}^{k-1} x_i \leqslant t \leqslant \sum_{i=0}^{k} x_i \} \cong \Delta^{q+1}$, а изоморфизм $\tau^n_k : T^n_k \to \Delta^n$ задается формулами

$$(x_0, \dots, x_n, t) \mapsto (x_0, \dots, x_{k-1}, t - \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} x_i, \sum_{i=0}^{k} x_i - t, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Определим теперь отображение $h_n : C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$, задав его на симплексах формулой

$$h_n(\sigma) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k h \circ (\sigma \times \mathrm{Id}_I) \circ (\tau^n_k)^{-1} \qquad (\text{мы компонируем } \Delta^{n+1} \xrightarrow{(\tau^n_k)^{-1}} T^n_k \subset \Delta^n \times I \xrightarrow{\sigma \times \mathrm{Id}_I} X \times I \xrightarrow{h} Y).$$

Тогда $\partial_{n+1} h_n + h_{n-1} \partial_n = f_n - g_n$ (первое слагаемое левой части — сумма всех граней симплексов T^n_k со знаками; грани, лежащие внутри призмы попарно сократятся, грани, лежащие на боковой поверхности призмы сократятся со вторым слагаемым левой части, так что останутся только верхнее и нижнее основания, которые дадут правую часть равенства). Таким образом, $h_\bullet$ осуществляет гомотопию между морфизмами комплексов $f_\bullet$ и $g_\bullet$. Определим $h^n : C^n(Y) \to C^{n-1}(X)$ формулой $(h^n c)(a) = c(h_{n-1} a)$. Тогда

$$((\delta^{n-1} h^n + h^{n+1} \delta^n) c)(a) = (h^n c)(\partial_n a) + (\delta^n c)(h_n a) = c((h_{n-1}\partial_n + \partial_{n+1} h_n) a) = c((f_n - g_n) a) = ((f^n - g^n) c)(a),$$

то есть $h^\bullet$ осуществляет гомотопию между морфизмами комплексов $f^\bullet$ и $g^\bullet$. Следовательно, $f^* = g^*$. $\square$

Лемма 3.8 (аксиома размерности). *Имеем $H^n_{\mathrm{sing}}(*) = 0$ при $n \neq 0$ и $H^0_{\mathrm{sing}}(*) = \mathbb{Z}$.*

Доказательство: у пространства $*$ есть ровно один сингулярный симплекс в каждой размерности, поэтому $C_n(*) = \mathbb{Z}$ при всех n. Отображение ∂^k_n тождественно при всех n и k, поэтому $\partial_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k$ равно 0 при нечетном n и 1 при четном n. Значит $C^n(*) = \mathbb{Z}$, а δ^n равно 0 при четном n и 1 при нечетном n. Вычисляя когомологии комплекса $C^\bullet(*) = \{ \dots \to 0 \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \dots \}$ получаем ответ. $\square$

Лемма 3.9. *Если $X \xrightarrow{f} Y$ — гомотопическая эквивалентность, то $H^n_{\mathrm{sing}}(Y) \xrightarrow{f^*} H^n_{\mathrm{sing}}(X)$ — изоморфизм.*

Доказательство: это формально следует из аксиомы гомотопии и функториальности: выберем гомотопически обратное отображение $g : Y \to X$, тогда $g^* \circ f^* = (f \circ g)^* = (\mathrm{Id}_Y)^* = \mathrm{Id}$, $f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = (\mathrm{Id}_X)^* = \mathrm{Id}$. $\square$

Следствие 3.10. *Если X — стягиваемо, то $H^n_{\mathrm{sing}}(X) = 0$ при $n \neq 0$ и $H^0_{\mathrm{sing}}(X) = \mathbb{Z}$.*

Предложение 3.11. *$H^n_{\mathrm{sing}}(\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha) = \prod_{\alpha \in A} H^n_{\mathrm{sing}}(X_\alpha)$.*

Доказательство: стандартный симплекс Δ^n связен, поэтому всякий сингулярный симплекс $\sigma : \Delta^n \to X$ попадает в один из X_α. Значит $C_n(X) = \bigoplus_{\alpha \in A} C_n(X_\alpha)$, а $C^n(X) = \prod_{\alpha \in A} C^n(X_\alpha)$. $\square$

Лемма 3.12. *Если X линейно связно, то $H^0_{\mathrm{sing}}(X) \cong \mathbb{Z}$.*

Доказательство: заметим, что 0-мерные симплексы — это точки, а 1-мерные симплексы — это пути. Кроме того $(\delta^0 c)(a) = c(a(1)) - c(a(0))$. Так как любые две точки можно соединить путем, то c — 0-коцикл, если и только если он постоянен на всех точках. $\square$

Следствие 3.13. *$H^0_{\mathrm{sing}}(X) = \prod \mathbb{Z}$ — произведение по компонентам линейной связности.*

Пусть $f : X \to *$ — проекция. Если X непусто, то $f^* : \mathbb{Z} = H^n_{\mathrm{sing}}(*) \to H^n_{\mathrm{sing}}(X)$ — вложение. Определим приведенные сингулярные когомологии формулой $\widetilde{H}^n_{\mathrm{sing}}(X) = H^n_{\mathrm{sing}}(X) / H^n_{\mathrm{sing}}(*)$.