Точная последовательность корасслоения

Часть 1. Лемма о змее

Пусть $0 \to E^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} F^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} G^\bullet \to 0$ — точная тройка комплексов (т.е. $f^\bullet$ и $g^\bullet$ — морфизмы комплексов, а последовательности $0 \to E^i \xrightarrow{f^i} F^i \xrightarrow{g^i} G^i \to 0$ точны при всех i). Пусть $x \in H^i(G^\bullet)$. Выберем представляющий его коцикл $x' \in Z^i(G^\bullet) \subset G^i$. Так как g^i — эпиморфизм, найдется элемент $x'' \in F^i$, такой что $g^i(x'') = x'$. Пусть $x''' := d^i_F(x'')$. Тогда $g^{i+1}(x''') = g^{i+1}(d^i_F(x'')) = d^i_G(g^i(x'')) = d^i_G(x') = 0$, так как x' — коцикл. Значит, найдется единственный $x'''' \in E^{i+1}$, т.ч. $f^{i+1}(x'''') = x'''$.

Лемма 1.1. *Элемент x'''' является коциклом, а его класс когомологий зависит лишь от класса x, и не зависит от произвола в выборе элементов x' и x''.*

Доказательство: $f^{i+2}(d^{i+1}_E(x'''')) = d^{i+1}_F(f^{i+1}(x'''')) = d^{i+1}_F(x''') = d^{i+1}_F(d^i_F(x'')) = 0$, поэтому, так как f^{i+2} — мономорфизм, то $d^{i+1}_E(x'''') = 0$, то есть x'''' — коцикл.

Изучим теперь насколько x'''' зависит от произвола в выборах: $x'' \mapsto x'' + f^i(y) \Longrightarrow x''' \mapsto x''' + d^i_F(f^i(y)) = x''' + f^{i+1}(d^i_E(y)) \Longrightarrow x'''' \mapsto x'''' + d^i_E(y)$, то есть x'''' меняется на кограницу. Если же $x' \mapsto x' + d^{i-1}_G(z) = x' + d^{i-1}_G(g^{i-1}(z')) = x' + g^i(d^{i-1}_F(z'))$, где $z' \in F^{i-1}$, то $x'' \mapsto x'' + d^{i-1}_F(z') \Longrightarrow x''' \mapsto x''' + d^i_F(d^{i-1}_F(z')) = x'''$. □

Сопоставляя классу $x \in H^i(G^\bullet)$ класс коцикла x'''' в $H^{i+1}(E^\bullet)$ получаем отображение $\delta : H^i(G^\bullet) \to H^{i+1}(E^\bullet)$, называемое связывающим гомоморфизмом.

Теорема 1.2. *Если $0 \to E^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} F^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} G^\bullet \to 0$ — точная тройка комплексов, то последовательность когомологий $\cdots \to H^i(E^\bullet) \xrightarrow{H^i f} H^i(F^\bullet) \xrightarrow{H^i g} H^i(G^\bullet) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(E^\bullet) \xrightarrow{H^{i+1} f} H^{i+1}(F^\bullet) \to \dots$ точна.*

Доказательство: проверим сначала, что композиции стрелок равны нулю: $(H^i g \circ H^i f)(\bar{e}) = \overline{g^i(f^i(e))} = \bar{0} = 0$; если $x = H^i g(\bar{y})$, то $x' = g^i(y)$, $x'' = y$, $x''' = d^i_F(y) = 0$, $x'''' = 0$ и $\delta(x) = \overline{x''''} = 0$; и наконец, $(H^{i+1} f \circ \delta)(x) = \overline{f^{i+1}(x'''')} = \overline{x'''} = \overline{d^i_F(x'')} = 0$. **Точность в $H^i(F^\bullet)$:** если $H^i g(\bar{x}) = 0$, то $g^i(x) = d^{i-1}_G(y) = d^{i-1}_G(g^{i-1}(y')) = g^i(d^{i-1}_F(y'))$, значит $g^i(x - d^{i-1}_F(y')) = 0$, то есть $x - d^{i-1}_F(y') = f^i(z)$ и $\bar{x} = \overline{x - d^{i-1}_F(y')} = \overline{f^i(z)} = H^i f(\bar{z})$. **Точность в $H^i(G^\bullet)$:** если $\delta x = 0$, то $x'''' = d^i_E(y)$, значит $x''' = f^{i+1}(x'''') = f^{i+1}(d^i_E(y)) = d^i_F(f^i(y))$, но $x''' = d^i_F(x'')$, значит $d^i_F(x'' - f^i(y)) = 0$, значит $x = \bar{x'} = \overline{g^i(x'')} = \overline{g^i(x'' - f^i(y))} = H^i g(x'' - f^i(y))$. **Точность в $H^{i+1}(E^\bullet)$:** если $H^{i+1} f(\bar{y}) = 0$, то $f^{i+1}(y) = d^i_F(z)$, значит, $d^i_G(g^i(z)) = g^{i+1}(d^i_F(z)) = g^{i+1}(f^{i+1}(y)) = 0$, и полагая $x := \overline{g^i(z)}$, получаем $x' = g^i(z)$, $x'' = z$, $x''' = d^i_F(z) = f^{i+1}(y)$ и $x'''' = y$, значит $\bar{y} = \delta(x)$. □

Часть 2. Последовательность Майера–Виеториса

Теорема 2.1. *Если $X = U \cup V$ — открытое покрытие, то существует точная последовательность*

$$\cdots \to H^{n-1}_{\mathrm{sing}}(U \cap V) \to H^n_{\mathrm{sing}}(X) \to H^n_{\mathrm{sing}}(U) \oplus H^n_{\mathrm{sing}}(V) \to H^n_{\mathrm{sing}}(U \cap V) \to H^{n+1}_{\mathrm{sing}}(X) \to \dots$$

Рассмотрим в группе $C_n(X)$ подгруппу $C_n(U, V)$, порожденную симплексами, целиком лежащими либо в U, либо в V. Покажем, что вложение $C_\bullet(U, V) \to C_\bullet(X)$ является гомотопической эквивалентностью. Рассмотрим барицентрическое разбиение $\Delta^n = \cup_{\tau \in \mathfrak{S}_{n+1}} B^n_\tau$, где $B^n_\tau = \{\, (x_0, \dots, x_n) \in \Delta^n \mid x_{\tau_0} \leqslant x_{\tau_1} \leqslant \cdots \leqslant x_{\tau_n} \,\}$. Легко видеть, что каждый из B^n_τ является симплексом, поэтому получаем гомоморфизм групп

$$\beta_n : C_n(X) \to C_n(X), \qquad \sigma \mapsto \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{n+1}} \pm \sigma_{|B^n_\tau}.$$

Так как барицентрические разбиения симплекса и его граней согласованы, имеем

$$\partial_n \beta_n = \beta_{n-1} \partial_n.$$

Лемма 2.2. *Морфизм комплексов $\beta_\bullet : C_\bullet(X) \to C_\bullet(X)$ гомотопен тождественному.*

Доказательство: определим индуктивно барицентрическое разбиение призмы $\Delta^n \times I = \cup PB_i^{n+1}$ — рассмотрим тривиальное разбиение нижнего основания и барицентрические разбиения боковых граней; тогда PB_i^{n+1} — это пирамиды над этими симплексами. Определим гомотопию $h_n : C_n(X) \to C_{n+1}(X)$ формулой $h_n(\sigma) = \sum (\sigma \circ \mathsf{pr})_{|PB_i^{n+1}}$, (мы компонируем $PB^{n+1} \subset \Delta^n \times I \xrightarrow{\mathsf{pr}} \Delta^n \xrightarrow{\sigma} X$, pr — проекция на основание). Тогда $\partial_{n+1}h_n + h_{n-1}\partial_n = \beta_n - \mathrm{Id}$. (первое слагаемое — сумма всех граней симплексов PB_i^{n+1}; грани, лежащие внутри призмы попарно сократятся, грани, лежащие на боковой поверхности сократятся со вторым слагаемым, а останутся только верхнее и нижнее основания, которые дадут правую часть равенства). □

Лемма 2.3. *Вложение комплексов $C_\bullet(U,V) \to C_\bullet(X)$ индуцирует изоморфизм их гомологий.*

Доказательство: заметим, что β^r — эндоморфизм комплекса $C_\bullet(X)$, сохраняющий подкомплекс $C_\bullet(U,V)$, и гомотопный тождественному эндоморфизму на них обоих. Иначе говоря $\mathrm{Id} - \beta^r = \partial h_r + h_r \partial$ для всех r. Пусть класс гомологий комплекса $C_\bullet(X)$ представлен циклом $a \in C_n(X)$. Тогда $a = \beta^r a + (a - \beta^r a) = \beta^r a + \partial h_r(a)$. но $\beta_n^r a \in C_n(U,V)$ при $r \gg 0$. Значит морфизм гомологий сюръективен. Пусть теперь a — цикл в $C_n(U,V)$, являющийся границей в $C_n(X)$, то есть $a = \partial a'$, $a' \in C_{n+1}(X)$. Тогда $a = \beta^r a + (a - \beta^r a) = \beta^r \partial a' + \partial h_r(a) = \partial(\beta^r a' + h_r(a))$, но $\beta^r a' \in C_{n+1}(U,V)$ при $r \gg 0$, поэтому a гомологичен нулю в $C_\bullet(U,V)$. Значит морфизм гомологий инъективен. □

Следствие 2.4. *Вложение комплексов $C_\bullet(U,V) \to C_\bullet(X)$ — гомотопическая эквивалентность.*

На самом деле, любое отображение ограниченных комплексов свободных абалевых групп — гомотопическая эквивалентность. Доказательство — в задачах.

Следствие 2.5. *Эпиморфизм комплексов $C^\bullet(X) \to C^\bullet(U,V)$ индуцирует изоморфизм когомлогий.*

Доказательство: из соображений двойственности следует, что он — гомотопическая эквивалентность. □

Доказательство теоремы: рассмотрим последовательность морфизмов комплексов

$$0 \to C_\bullet(U \cap V) \xrightarrow{\varepsilon} C_\bullet(U) \oplus C_\bullet(V) \xrightarrow{\eta} C_\bullet(U,V) \to 0, \qquad \varepsilon(\sigma) = (\sigma, \sigma), \quad \eta(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_2.$$

Легко видеть, что она точна. Дуализируя, получаем точную последовательность комплексов

$$0 \to C^\bullet(U,V) \to C^\bullet(U) \oplus C^\bullet(V) \to C^\bullet(U \cap V) \to 0,$$

Применяя лемму о змее и учитывая, что когомлогии комплекса $C^\bullet(U,V)$ изоморфны сингулярным когомологиям X, получаем последовательность Майера–Виеториса. □

Часть 3. Аксиома точности

Лемма 3.1. *Если $i : A \to X$ — корасслоение и A стягиваемо, то $X \sim X/A$.*

Доказательство: продолжим гомотопию $\tilde{g} : A \times I \to X$, такую что $\tilde{g}_0 = \mathrm{Id}_A$, а $\tilde{g}_1$ — отображение в точку $a_0 \in A$ до гомотопии $G : X \times I \to X$, такой что $G_0 = \mathrm{Id}_X$. Тогда $G_1(A) = a_0$, поэтому G_1 пропускается через отображение $g : X/A \to X$. Ясно, что G осуществляет гомотопию $\mathrm{Id}_X \sim g \circ p$, где $p : X \to X/A$ — проекция. С другой стороны, $p \circ G$ отображает $A \times I$ в точку и поэтому пропускается через отображение $X/A \times I \to X/A$, которое очевидно осуществляет гомотопию $\mathrm{Id}_{X/A} \sim p \circ g$. □

Лемма 3.2. *Если $i : A \to X$ — корасслоение, то $X \cup_i CA \sim X/A$.*

Доказательство: легко видеть, что вложение $CA \to X \cup_i CA$ является корасслоением. Кроме того, CA стягиваемо. Поэтому $X \cup_i CA \sim X \cup_i CA/CA$, и очевидно $X \cup_i CA/CA \cong X/A$. □

Проверка аксиомы точности: рассмотрим покрытие $X \cup_i CA = (X \cup_i (A \times [0, 1/2))) \cup (CA \setminus (A \times 0))$. Заметим, что первое из множеств покрытия гомотопически эквивалентно X, второе стягиваемо, а пересечение гомотопически эквивалентно A. Поэтому последовательность Майера–Виеториса принимает вид

$$0 \to H^0_{\mathrm{sing}}(X/A) \to H^0_{\mathrm{sing}}(X) \oplus H^0_{\mathrm{sing}}(*) \to H^0_{\mathrm{sing}}(A) \to \ldots \to H^{n-1}_{\mathrm{sing}}(A) \to H^n_{\mathrm{sing}}(X/A) \to H^n_{\mathrm{sing}}(X) \to H^n_{\mathrm{sing}}(A) \to \ldots$$

Остается заметить, что $H^0_{\mathrm{sing}}(X/A) = \widetilde{H}^0_{\mathrm{sing}}(X/A) \oplus H^0_{\mathrm{sing}}(*)$ и «сократить» слагаемое $H^0_{\mathrm{sing}}(*)$ в первых двух членах комплекса. □

Лемма 3.3. *Если $f : X' \to X$ — непрерывно, $X = U \cup V$, $U' = f^{-1}(U)$, и $V' = f^{-1}(V)$, то следующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^n_{\mathrm{sing}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"] & H^n_{\mathrm{sing}}(U) \oplus H^n_{\mathrm{sing}}(V) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"] & H^n_{\mathrm{sing}}(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"] & H^{n+1}_{\mathrm{sing}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^n_{\mathrm{sing}}(X') \arrow[r] & H^n_{\mathrm{sing}}(U') \oplus H^n_{\mathrm{sing}}(V') \arrow[r] & H^n_{\mathrm{sing}}(U' \cap V') \arrow[r] & H^{n+1}_{\mathrm{sing}}(X') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Доказательство: заметим, что следующие две диаграммы коммутативны

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^\bullet(U,V) \arrow[r] \arrow[d, "f^\bullet"] & C^\bullet(U) \oplus C^\bullet(V) \arrow[r] \arrow[d, "f^\bullet"] & C^\bullet(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d, "f^\bullet"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^\bullet(U',V') \arrow[r] & C^\bullet(U') \oplus C^\bullet(V') \arrow[r] & C^\bullet(U' \cap V') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C^\bullet(U,V) \arrow[r] \arrow[d, "f^\bullet"] & C^\bullet(X) \arrow[d, "f^\bullet"] \\
C^\bullet(U',V') \arrow[r] & C^\bullet(X')
\end{tikzcd}$$

Из второй диаграммы следует, что изоморфизмы когомологий коммутируют с f^*, а из первой диаграммы и функториальности связывающего гомоморфизма следует коммутативность диаграммы морфизма длинных точных последовательностей. □

Следствие 3.4. *Если $i : A \to X$ и $i' : A' \to X'$ — корасслоения и $f : X' \to X$, $g : A' \to A$ — морфизмы, такие что $f \circ i' = i \circ g$, то следующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{n-1}_{\mathrm{sing}}(A) \arrow[r] \arrow[d, "g^*"] & H^n_{\mathrm{sing}}(X/A) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"] & H^n_{\mathrm{sing}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"] & H^n_{\mathrm{sing}}(A) \arrow[r] \arrow[d, "g^*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^{n-1}_{\mathrm{sing}}(A') \arrow[r] & H^n_{\mathrm{sing}}(X'/A') \arrow[r] & H^n_{\mathrm{sing}}(X') \arrow[r] & H^n_{\mathrm{sing}}(A') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Таким образом, теория сингулярных когомологий является теорией когомологий. В дальнейшем будем писать $H^n(X)$ вместо $H^n_{\mathrm{sing}}(X)$.

Часть 4. Вычисления

Лемма 4.1. *$H^n(S^m) = \mathbb{Z}$ при $n = 0, m$ и нулю при остальных n.*

Доказательство: рассмотрим вложение $S^m \to D^{m+1}$, так что $D^{m+1}/S^m \cong S^{m+1}$. Точная последовательность

$$\cdots \to H^{n-1}(D^{m+1}) \to H^{n-1}(S^m) \to H^n(S^{m+1}) \to H^n(D^{m+1}) \to \ldots$$

показывает, что при $n \geqslant 2$ имеем $H^n(S^{m+1}) = H^{n-1}(S^m)$. С другой стороны, при $n = 1$ коядро отображения $H^0(D^{m+1}) \to H^0(S^m)$ есть $\widetilde{H}^0(S^m)$ и равно $\mathbb{Z}$ при $m = 0$ и нулю иначе. Далее по индукции. □

Лемма 4.2. *Пусть X' получается из X приклеиванием шара D^{m+1} вдоль S^m относительно отображения $f : S^m \to X$. Тогда $H^n(X') = H^n(X)$ при $n \neq m, m+1$, а $H^m(X')$ и $H^{m+1}(X')$ вычисляются из точной последовательности*

$$0 \to H^m(X') \to H^m(X) \xrightarrow{f^*} \mathbb{Z} \to H^{m+1}(X') \to H^{m+1}(X) \to 0.$$

Доказательство: так как $S^m \to D^{m+1}$ — корасслоение, то $X \to X' = X \cup_{S^m} D^{m+1}$ — тоже корасслоение, и обозначая вложение $D^{m+1} \to X'$ через F получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"] & H^n(X/X') \arrow[r] \arrow[d, "F^*"] & H^n(X') \arrow[r] \arrow[d, "F^*"] & H^n(X) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^{n-1}(S^m) \arrow[r] & H^n(D^{m+1}/S^m) \arrow[r] & H^n(D^{m+1}) \arrow[r] & H^n(S^m) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Легко видеть, что $X'/X \cong D^{m+1}/S^m$, поэтому $F^* : H^n(X/X') \to H^n(D^{m+1}/S^m)$ — изоморфизм. С другой стороны, отображение $\mathbb{Z} = H^{n-1}(S^m) \to H^n(D^{m+1}/S^m)$ также изоморфизм, в силу стягиваемости D^{m+1}. Отсюда получаем точную последовательность

$$\cdots \to H^{n-1}(S^m) \to H^n(X') \to H^n(X) \xrightarrow{f^*} H^n(S^m) \to H^{n+1}(X') \to H^{n+1}(X) \to H^{n+1}(S^m) \to \ldots.$$

Остается воспользоваться тем, что мы знаем когомологии сферы. □