# Клеточные пространства

## Часть 1. Определение

Клеточное пространство или CW-комплекс — это хаусдорфово топологическое пространство $X$, представленное в виде $X = \cup_{q=0}^{\infty} \cup_{\alpha \in \mathsf{C}_q^X} e_\alpha^q$ непересекающихся множество (клеток) и с заданными отображениями $\chi_\alpha : D^q \to X$, индуцирующими гомеоморфизм $\mathrm{Int}(D^q) \to e_\alpha^q$, так что

- **(C):** граница всякой клетки содержится в объединении *конечного* числа клеток *меньшей* размерности;
- **(W):** множество $F \subset X$ замкнуто $\iff$ для любой клетки $e_\alpha^q$ множество $F \cap \overline{e_\alpha^q}$ замкнуто.

**Примеры 1.1.** (1) сфера $S^n = e^0 \cup e^n$, $\chi : D^n \to D^n/S^{n-1} \cong S^n$;
(2) сфера $S^n = \cup_{q=0}^n (e_+^q \cup e_-^q)$, $e_\pm^q = \{ (x_0, \ldots, x_n) \in S^n \mid x_{q+1} = \cdots = x_n = 0,\ \pm x_q > 0 \}$, $\chi_\pm^q : D^q \cong \overline{e_\pm^q}$;
(3) шар $D^n = S^{n-1} \cup e^n$, $\chi^n = \mathrm{Id}_{D^n}$.

Замкнутое подмножество $Y \subset X$ клеточного пространства $X$ называется клеточным подпространством, если $Y$ является объединением клеток пространства $X$. Например, $\mathrm{sk}_n X := \cup_{q=0}^n \cup_{\alpha \in \mathsf{C}_q^X} e_\alpha^q \subset X$ — $n$-ый остов пространства $X$, является его клеточным подпространством.

Непрерывное отображение $f : Y \to X$ клеточных пространств называется клеточным, если $f(\mathrm{sk}_n Y) \subset \mathrm{sk}_n X$.

**Лемма 1.2.** *Подмножество $F \subset X$ замкнуто $\iff$ $\chi_\alpha^{-1}(F)$ замкнуто в $D^n$ для всех $n$, $\alpha \in \mathsf{C}_n^X$.*

Доказательство: из $\chi_\alpha^{-1}(F) \cap \mathrm{Int}(D^n) \cong F \cap e_\alpha^n$ следует ($\Longleftarrow$), а ($\Longrightarrow$) следует из непрерывности $\chi_\alpha$. □

**Лемма 1.3.** *Если $X$ — клеточное пространство, то $X = \cup_{n=0}^{\infty} \mathrm{sk}_n X$ с топологией прямого предела.*

Доказательство: вложения $\mathrm{sk}_n X \to X$ индуцируют биекцию $\cup_{n=0}^{\infty} \mathrm{sk}_n X \to X$. Она является гомеоморфизмом по определению топологии прямого предела и аксиоме (W). □

**Лемма 1.4.** *Если $K \subset X$ — компакт, то $K$ пересекает лишь конечное множество клеток.*

Доказательство: Пусть $e_1, e_2, \ldots$ — последовательность различных клеток неубывающей размерности, пересекающихся с $K$ и пусть $x_i \in e_i \cap K$. Тогда множество $\{ x_i \}_{i=1}^{\infty}$ замкнуто в $X$, так как его пересечения с замыканиями всех клеток конечны, а значит и замкнуты, следовательно оно не имеет предельных точек. □

Клеточное пространство $X$ называется конечным (счетным), если множество его клеток конечно (счетно).

**Следствие 1.5.** *Клеточное пространство компактно тогда и только тогда, когда оно конечно.*

**Теорема 1.6** (теорема Борсука). *Если $X$ — клеточное пространство, а $A \subset X$ — клеточное подпространство, то вложение $A \to X$ — корасслоение.*

Доказательство: мы уже знаем, что $S^{n-1} \to D^n$ — корасслоение (это конус отображения $S^{n-1} \xrightarrow{\mathrm{Id}} S^{n-1}$). Следовательно, отображение $\mathbf{S} = \sqcup_{\alpha \in \mathsf{C}_n^X \setminus \mathsf{C}_n^A} S^{n-1} \to \sqcup_{\alpha \in \mathsf{C}_n^X \setminus \mathsf{C}_n^A} D^n = \mathbf{D}$ — тоже корасслоение. Но $A \cup \mathrm{sk}_n X = (A \cup \mathrm{sk}_{n-1} X) \sqcup_{\mathbf{S}} \mathbf{D}$, поэтому $A \cup \mathrm{sk}_{n-1} X \to A \cup \mathrm{sk}_n X$ — корасслоение.

Пусть теперь $F : X \to Y$ — непрерывное отображение, а $\tilde{f} : A \times I \to Y$ — гомотопия, такая что $f_0 = F_{|A}$. Вначале продолжим $\tilde{f}$ до гомотопии $\widetilde{F}^0 : (A \cup \mathrm{sk}_0 X) \times I \to Y$, тождественной на $\mathrm{sk}_0 X \setminus A$. Далее, пользуясь тем, что $A \cup \mathrm{sk}_{n-1} X \to A \cup \mathrm{sk}_n X$ — корасслоение, построим гомотопии $\widetilde{F}^n : (A \cup \mathrm{sk}_n X) \times I \to Y$, продолжающии друг друга. Покажем, что отображение $\widetilde{F} : X \times I \to Y$ равное $\widetilde{F}^n$ на $A \cup \mathrm{sk}_n X$ непрерывно. Действительно, если $U \subset Y$ — открыто, то $\widetilde{F}^{-1}(U) \cap ((A \cup \mathrm{sk}_n X) \times I) = (\widetilde{F}^n)^{-1}(U)$ — открыто в силу непрерывности $\widetilde{F}^n$, следовательно $\widetilde{F}^{-1}(U)$ открыто, так как $X \times I \cong (\varinjlim (A \cup \mathrm{sk}_n X)) \times I \cong \varinjlim ((A \cup \mathrm{sk}_n X) \times I)$. □

**Следствие 1.7.** *Если $A \subset X$ — клеточное подпространство и $A$ стягиваемо, то $X \sim X/A$.*

## Часть 2. Когомологии клеточных пространств

Пусть $X$ — клеточное пространство. Пусть $\alpha \in \mathsf{C}^X_n$, $\beta \in \mathsf{C}^X_{n+1}$. Ясно, что отображение $\chi_\beta : D^{n+1} \to X$ переводит $S^n \subset D^{n+1}$ в $\mathrm{sk}_n X$. Рассмотрим композицию

$$\varphi^\alpha_\beta : S^n \xrightarrow{\chi_\beta} \mathrm{sk}_n X \to \mathrm{sk}_n X/\mathrm{sk}_{n-1}X \cong \vee_{\alpha\in \mathsf{C}^X_n} S^n \xrightarrow{\mathrm{pr}_\alpha} S^n,$$

где $\mathrm{pr}_\alpha$ — проекция на сферу, соответствующую клетке $\alpha$. Тогда $(\varphi^\alpha_\beta)^* : H^n(S^n) \to H^n(S^n)$ — умножение на некоторое число. Обозначим его через $d^\alpha_\beta$. Пусть теперь $\mathcal{C}^n(X) = \prod_{\alpha\in\mathsf{C}^X_n} \mathbb{Z}$ и для всякого элемента $k = (k_\alpha) \in \mathcal{C}^n(X)$ определим

$$\delta k \in \mathcal{C}^{n+1}(X), \qquad (\delta k)_\beta = \sum_{\alpha\in\mathsf{C}^X_n} d^\alpha_\beta k_\alpha.$$

**Лемма 2.1.** *Группа $\mathcal{C}^n(X)$ канонически изоморфна группу $H^n(\mathrm{sk}_n X/\mathrm{sk}_{n-1}X)$, а отображение $\delta$ совпадает со связывающим гомоморфизмом $H^n(\mathrm{sk}_n X/\mathrm{sk}_{n-1}X) \to H^{n+1}(\mathrm{sk}_{n+1}X/\mathrm{sk}_n X)$ соответствующим корасслоению $\mathrm{sk}_n X/\mathrm{sk}_{n-1}X \to \mathrm{sk}_{n+1}X/\mathrm{sk}_{n-1}X$.*

Доказательство: рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\vee_{\beta\in\mathsf{C}^X_{n+1}} S^{n+1} \arrow[r, equal] & \mathrm{sk}_{n+1}X/\mathrm{sk}_n X \arrow[r, equal] & \mathrm{sk}_{n+1}X/\mathrm{sk}_n X & \\
\sqcup_{\beta\in\mathsf{C}^X_{n+1}} D^{n+1} \arrow[u] \arrow[r, "\sqcup\chi_\beta"] & \mathrm{sk}_{n+1}X \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{sk}_{n+1}X/\mathrm{sk}_{n-1}X \arrow[u] & \\
\sqcup_{\beta\in\mathsf{C}^X_{n+1}} S^n \arrow[u] \arrow[r, "\sqcup\chi_\beta"] & \mathrm{sk}_n X \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{sk}_n X/\mathrm{sk}_{n-1}X \arrow[u] \arrow[r, equal] & \vee_{\beta\in\mathsf{C}^X_n} S^n
\end{tikzcd}$$

Так как связывающий гомоморфизм в последовательности корасслоения функториален, и отождествление $H^{n+1}(S^{n+1}) \cong \mathbb{Z}$ использует связывающий гомоморфизм левого столбца, получаем требуемое утверждение. $\square$

**Лемма 2.2.** *$\delta\circ\delta = 0$.*

Доказательство: надо проверить, что зануляется композиция

$$H^{n-1}(\mathrm{sk}_{n-1}X/\mathrm{sk}_{n-2}X) \xrightarrow{\delta} H^n(\mathrm{sk}_n X/\mathrm{sk}_{n-1}X) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(\mathrm{sk}_{n+1}X/\mathrm{sk}_n X).$$

Но в силу функториальности первый морфизм раскладывается в композицию

$$H^{n-1}(\mathrm{sk}_{n-1}X/\mathrm{sk}_{n-2}X) \xrightarrow{\delta} H^n(\mathrm{sk}_{n+1}X/\mathrm{sk}_{n-1}X) \xrightarrow{i^*} H^n(\mathrm{sk}_n X/\mathrm{sk}_{n-1}X),$$

где $i : \mathrm{sk}_n X/\mathrm{sk}_{n-1}X \to \mathrm{sk}_{n+1}X/\mathrm{sk}_{n-1}X$ — вложение, а $\delta\circ i^* = 0$. $\square$

**Теорема 2.3.** *Когомологии комплекса $\mathcal{C}^\bullet(X)$ изоморфны когомологиям пространства $X$.*

Доказательство: рассмотрим последовательность корасслоения $\mathrm{sk}_n X/\mathrm{sk}_{n-1}X \to \mathrm{sk}_{n+1}X/\mathrm{sk}_{n-1}X$:

$$H^n(\mathrm{sk}_{n+1}X/\mathrm{sk}_n X) \to H^n(\mathrm{sk}_{n+1}X/\mathrm{sk}_{n-1}X) \to H^n(\mathrm{sk}_n X/\mathrm{sk}_{n-1}X) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(\mathrm{sk}_{n+1}X/\mathrm{sk}_n X)$$

Так как $\mathrm{sk}_{n+1}X/\mathrm{sk}_n X \cong \vee S^{n+1}$, то первый член равен нулю, поэтому $\operatorname{Ker}\delta = H^n(\mathrm{sk}_{n+1}X/\mathrm{sk}_{n-1}X)$. Из функториальности связывающего гомоморфизма следует, что отображение $\delta : H^{n-1}(\mathrm{sk}_{n-1}X/\mathrm{sk}_{n-2}X) \to \operatorname{Ker}\delta = H^n(\mathrm{sk}_{n+1}X/\mathrm{sk}_{n-1}X)$ является связывающим гомоморфизмом в последовательности корасслоения $\mathrm{sk}_{n-1}X/\mathrm{sk}_{n-2}X \to \mathrm{sk}_{n+1}X/\mathrm{sk}_{n-2}X$:

$$H^{n-1}(\mathrm{sk}_{n-1}X/\mathrm{sk}_{n-2}X) \xrightarrow{\delta} H^n(\mathrm{sk}_{n+1}X/\mathrm{sk}_{n-1}X) \to H^n(\mathrm{sk}_{n+1}X/\mathrm{sk}_{n-2}X) \to H^n(\mathrm{sk}_{n-1}X/\mathrm{sk}_{n-2}X)$$

Так как $\mathrm{sk}_{n-1}X/\mathrm{sk}_{n-2}X \cong \vee S^{n-1}$, то последний член равен нулю, поэтому $H^n(\mathcal{C}^\bullet(X)) = H^n(\mathrm{sk}_{n+1}X/\mathrm{sk}_{n-2}X)$. Рассматривая последовательность корасслоения $\mathrm{sk}_m X/\mathrm{sk}_{m-1}X \to \mathrm{sk}_{n+1}X/\mathrm{sk}_{m-1}X$ при $m \leqslant n-2$:

$$H^{n-1}(\mathrm{sk}_m X/\mathrm{sk}_{m-1}X) \to H^n(\mathrm{sk}_{n+1}X/\mathrm{sk}_m X) \to H^n(\mathrm{sk}_{n+1}X/\mathrm{sk}_{m-1}X) \to H^n(\mathrm{sk}_m X/\mathrm{sk}_{m-1}X)$$

и замечая, что крайние члены равны нулю, получаем $H^n(\mathrm{sk}_{n+1}X/\mathrm{sk}_{n-2}X) = H^n(\mathrm{sk}_{n+1}X/\mathrm{sk}_{n-3}X) = \cdots = H^n(\mathrm{sk}_{n+1}X)$. Рассматривая последовательность корасслоения $\mathrm{sk}_m X \to \mathrm{sk}_{m+1}X$ при $m \geqslant n+1$:

$$H^n(\mathrm{sk}_{m+1}X/\mathrm{sk}_m X) \to H^n(\mathrm{sk}_{m+1}X) \to H^n(\mathrm{sk}_m X) \to H^{n+1}(\mathrm{sk}_{m+1}X/\mathrm{sk}_m X)$$

и замечая, что крайние члены равны нулю, получаем $H^n(\mathrm{sk}_{n+1}X) = H^n(\mathrm{sk}_{n+2}X) = \ldots$. Но ввиду компактности $\Delta^n$ всякая цепь в $X$ содержится в одном из его остовов, поэтому $C^n(X) = \varprojlim C^n(\mathrm{sk}_N X)$, $Z^n(X) = \varprojlim Z^n(\mathrm{sk}_N X)$, $B^n(X) = \varprojlim B^n(\mathrm{sk}_N X)$, а значит $H^n(X) = \varprojlim H^n(\mathrm{sk}_N X) = H^n(\mathrm{sk}_{n+1}X)$. $\square$

**Лемма 2.4.** *Если $E^\bullet$ — конечный комплекс, то $\sum_n (-1)^n \operatorname{rank}(E^n) = \sum_n (-1)^n \operatorname{rank}(H^n(E^\bullet))$.*

Доказательство: из последовательностей $0 \to Z^n \to E^n \to B^{n+1} \to 0$, $0 \to B^n \to Z^n \to H^n \to 0$, получаем $\sum\limits_n (-1)^n \operatorname{rank}(E^n) = \sum\limits_n (-1)^n (\operatorname{rank}(Z^n) + \operatorname{rank}(B^{n+1})) = \sum\limits_n (-1)^n (\operatorname{rank}(Z^n) - \operatorname{rank}(B^n)) = \sum\limits_n (-1)^n \operatorname{rank}(H^n)$. $\square$

Число $\chi(X) = \sum_n (-1)^n \operatorname{rank}(H^n(X))$ называется эйлеровой характеристикой пространства $X$.

**Следствие 2.5.** *Если $X$ — конечное клеточное пространство, то знакопеременная сумма числа клеток равна его эйлеровой характеристике и не зависит от разбиения на клетки.*

## Часть 3. Умножение в когомологиях

Пусть $X$ — топологическое пространство, $c_1 \in C^{n_1}(X)$, $c_2 \in C^{n_2}(X)$. Определим коцепь $c_1 \cup c_2 \in C^{n_1+n_2}(X)$

$$(c_1 \cup c_2)(\sigma) = c_1(\sigma_{0,\ldots,n_1}) c_2(\sigma_{n_1,\ldots,n_1+n_2}),$$

где $\sigma_{0,\ldots,n_1}$ и $\sigma_{n_1,\ldots,n_1+n_2}$ — ограничения симплекса $\sigma$ на грани с указанными номерами вершин.

**Лемма 3.1.** *Имеем* (a) $\delta(c_1 \cup c_2) = (\delta c_1) \cup c_2 + (-1)^{n_1} c_1 \cup (\delta c_2)$; (b) $c_1 \cup (c_2 \cup c_3) = (c_1 \cup c_2) \cup c_3$.

Доказательство:
(a) $\delta(c_1 \cup c_2)(\sigma) = (c_1 \cup c_2)(\partial\sigma) = \sum_{k=0}^{n_1+n_2} (-1)^k (c_1 \cup c_2)(\sigma_{0,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n_1+n_2}) = [(\delta c_1) \cup c_2 + (-1)^{n_1} c_1 \cup (\delta c_2)](\sigma)$.
(b) $(c_1 \cup (c_2 \cup c_3))(\sigma) = c_1(\sigma_{0,\ldots,n_1}) c_2(\sigma_{n_1,\ldots,n_1+n_2}) c_3(\sigma_{n_1+n_2,\ldots,n_1+n_2+n_3}) = ((c_1 \cup c_2) \cup c_3)(\sigma)$. $\square$

**Следствие 3.2.** *Операция $\cup$ индуцирует ассоциативную билинейную операцию в когомологиях.*

Доказательство: из пункта (a) следует, что $\cup$-произведение коциклов является коциклом, а $\cup$-произведение коцикла и кограницы — кограницей, поэтому возникает корректно определенная операция на когомологиях $\cup : H^{n_1}(X) \times H^{n_2}(X) \to H^{n_1+n_2}(X)$. Она ассоциативна в силу пункта (b), а билинейность очевидна. $\square$

Обозначим через $1_X$ коцепь в $C^0(X)$, равную 1 на всех 0-симплексах. Ясно, что $(\delta 1_X)(\sigma) = 1_X(\partial\sigma) = 1_X(\sigma_1 - \sigma_0) = 1 - 1 = 0$, то есть $1_X$ — коцикл. Обозначим его класс когомологий через $1 \in H^0(X)$.

**Лемма 3.3.** *Для любого $\gamma \in H^n(X)$ имеем $1 \cup \gamma = \gamma \cup 1 = \gamma$.*

Доказательство: $(1_X \cup c)(\sigma) = 1_X(\sigma_0) c(\sigma) = c(\sigma)$, $(c \cup 1_X)(\sigma) = c(\sigma) 1_X(\sigma_n) = c(\sigma)$. $\square$

Чтобы проверить коммутативность $\cup$-произведения нам понадобится

**Лемма 3.4.** *Определим $\omega_n : C^n(X) \to C^n(X)$ формулой $(\omega_n c)(\sigma) = c(\sigma_{n,\ldots,0})$. Тогда $(-1)^{n(n+1)/2}\omega_n \sim \mathrm{Id}$.*

Доказательство: рассмотрим разбиение призмы $\Delta^n \times I = \sqcup T_k^{n+1}$ и определим отображение $h_n : C_n(X) \to C_{n+1}(X)$ формулой $h(\sigma) = \sum (-1)^k (\sigma \times \mathrm{Id}_I)_{|T_k^{n+1}}$. Тогда $\partial_{n+1} h_n + h_{n-1}\partial_n = \mathrm{Id} - (-1)^{n(n+1)/2}\omega_n$. Следовательно, $\delta^{n-1} h^n + h^{n+1}\delta^n = \mathrm{Id} - (-1)^{n(n+1)/2}\omega^n$, где $(h^n c)(\sigma) = c(h_{n-1}\sigma)$. $\square$

**Лемма 3.5.** $(c_1 \cup c_2) = \omega((\omega c_2) \cup (\omega c_1))$.

Доказательство: $(\omega((\omega c_2) \cup (\omega c_1)))(\sigma) = ((\omega c_2) \cup (\omega c_1))(\sigma_{n_1+n_2,\ldots,0}) = (\omega c_2)(\sigma_{n_1+n_2,\ldots,n_1})(\omega c_1)(\sigma_{n_1,\ldots,0}) = c_2(\sigma_{n_1,\ldots,n_1+n_2}) c_1(\sigma_{0,\ldots,n_1}) = (c_1 \cup c_2)(\sigma)$. $\square$

**Следствие 3.6.** *$\cup$-произведение в когомологиях суперкоммутативно: если $\gamma_1 \in H^{n_1}(X)$, а $\gamma_2 \in H^{n_2}(X)$, то $\gamma_1 \cup \gamma_2 = (-1)^{n_1 n_2} \gamma_2 \cup \gamma_1$.*

Доказательство: $(n_1+n_2)(n_1+n_2+1)/2 - n_1(n_1+1)/2 - n_2(n_2+1)/2 = n_1 n_2$. $\square$

**Лемма 3.7.** *Если $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, то $f^* : \oplus H^n(Y) \to \oplus H^n(X)$ — гомоморфизм колец.*

Доказательство: $(f^{n_1+n_2}(c_1 \cup c_2)) = (f^{n_1} c_1) \cup (f^{n_2} c_2)$. $\square$

**Теорема 3.8.** *$X \mapsto H^\bullet(X) := \oplus H^n(X)$ — контравариантный функтор из категории топологических пространств в категорию суперкоммутативных колец.*