Гомологии и когомологии с коэффициентами

Часть 1. Гомологии и когомологии с коэффициентами

Пусть G — произвольная абелева группа. Определим цепной и коцепной комплексы топологического пространства X с коэффициентами в G, как

$$C_n(X,G) = \oplus_\sigma G = C_n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G, \qquad C^n(X,G) = \mathrm{Hom}(C_n(X), G)$$

(напомним, что тензорным произведением абелевых групп A и B называется абелева группа с множеством образующих $\{\, a\otimes b\,\}_{s\in A,\ b\in B}$, и соотношениями Таким образом, сингулярная n-мерная цепь с коэффициентами в G — это линейная комбинация сингулярных n-мерных симплексов с коэффициентами в G, а сингулярная n-мерная коцепь с коэффициентами в G — это G-значная функция на множестве сингулярных n-мерных симплексов. Дифференциалы задаются формулами $\partial(\sum g_i\sigma_i) = \sum g_1(\partial\sigma_i)$, $(\delta c)(\sigma) = c(\partial\sigma)$. Группы когомологий этих комплексов называются соответственно гомологиями и когомологиями с коэффициентами в G:

$$H_n(X,G) = H_n(C_\bullet(X,G)), \qquad H^n(X,G) = H^n(C^\bullet(X,G)).$$

Легко видеть, что гомологии и когомологии с коэффициентами в G удовлетворяют тем же свойствам, что и обычные гомологии и когомологии. А именно, они функториальны, удовлетворяют аксиоме точности. Кроме того для них имеются точные гомологическая и когомологическая последовательности корасслоения

$$\dots \to H^n(X/A,G) \to H^n(X,G) \to H^n(A,G) \to H^{n+1}(X/A,G) \to \dots$$
$$\dots \to H_n(A,G) \to H_n(X,G) \to H_n(X/A,G) \to H_{n-1}(A,G) \to \dots$$

Единственное различие — аксиома размерности: $H_0(*,G) = G$, $H^0(*,G) = G$.

Точно так же как и обычные гомологии и когомологии клеточного пространства X гомологии и когомологии с коэффициентами в G можно вычислять с помощью клеточных комплексов

$$\mathcal{C}_n(X,G) = \bigoplus_{\alpha\in \mathsf{C}_n^X} G = \mathcal{C}_n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G, \qquad \mathcal{C}^n(X,G) = \prod_{\alpha\in \mathsf{C}_n^X} G = \mathrm{Hom}(\mathcal{C}_n(X), G),$$

дифференциалы в которых задаются теми же матрицами.

Часть 2. Функторы Tor и Ext

Пусть A — абелева группа. Представим ее как фактор свободной абелевой группы F_0 по подгруппе F_1 (которая автоматически тоже будет свободной). Иначе говоря, зафиксируем точную последовательность (резольвенту) $0 \to F_1 \xrightarrow{\alpha} F_0 \xrightarrow{\pi} A \to 0$. Теперь применим к этой резольвенте функторы $-\otimes B$ и $\mathrm{Hom}(-,B)$.

Лемма 2.1. (i) *Последовательность* $F_1\otimes B \xrightarrow{\alpha} F_0 \otimes B \xrightarrow{\pi} A\otimes B \to 0$ *точна везде, кроме быть может первого члена;* (ii) *последовательность* $0 \to \mathrm{Hom}(A,B) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}(F_0,B) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}(F_1,B)$ *точна везде, кроме быть может последнего члена.*

Доказательство: (i) если $a = \pi(f_0)$, то $a\otimes b = \pi(f_0\otimes b)$, а так как группа $A\otimes B$ порождается элементами вида $a\otimes b$, то π сюръективен. Если $x = \sum f_0^i \otimes b^i \in \mathrm{Ker}\,\pi$, то $\sum \pi(f_0^i)\otimes b^i$ может быть представлена в виде линейной комбинации элементов вида $(a_1+a_2)\otimes b - a_1\otimes b - a_2\otimes b$ и $a\otimes(b_1+b_2) - a\otimes b_1 - a\otimes b_2$ в свободной абалевой группе $\oplus_{(a,b)\in A\times B}\mathbb{Z}$ Поднимая каждый из a_i в F_0 и вычитая соответствующую линейную комбинацию из x, можем считать, что $\sum \pi(f_0^i)\otimes b^i = 0$ в $\oplus_{(a,b)\in A\times B}\mathbb{Z}$. Приводя подобные слагаемые при b_i, получаем, что $x \in \mathrm{Im}\,\alpha$. Часть (ii) доказывается еще проще: если $\varphi \in \mathrm{Ker}\,\pi^* \subset \mathrm{Hom}(A,B)$, то есть $\varphi\circ\pi = 0$, то $\varphi = 0$ так как π сюръективен, а если $\varphi \in \mathrm{Ker}\,\alpha^* \subset \mathrm{Hom}(F_0,B)$, то есть $\varphi\circ\alpha = 0$, то полагая $\psi(\pi(f_0)) = \varphi(f_0)$, получаем корректно определенный морфизм $\psi \in \mathrm{Hom}(A,B)$, такой что $\varphi = \pi^*(\psi)$. □

Группа $\mathrm{Ker}(F_1\otimes B \xrightarrow{\alpha} F_0\otimes B)$ обозначается $\mathrm{Tor}_1(A,B)$, а группа $\mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}(F_0,B) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}(F_1,B)) = \mathrm{Hom}(F_1,B)/\,\mathrm{Im}\,\alpha^*$ обозначается $\mathrm{Ext}^1(A,B)$.

Лемма 2.2. *Группы* $\mathrm{Tor}_1(A,B)$ *и* $\mathrm{Ext}^1(A,B)$ *не зависят от выбора резольвенты.*

Доказательство: пусть $0\to F_1'\xrightarrow{\alpha'}F_0'\xrightarrow{\pi'}A\to 0$ — другая резольвента. Построим морфизм комплексов $F_\bullet\to F_\bullet'$, индуцирующий тождественный морфизм $A=H_\bullet(F_\bullet)\to H_\bullet(F_\bullet')=A$. Сопоставим всякой образующей $f_{0i}\in F_0$ элемент из $f_{0i}'\in F_0'$, такой что $\pi'(f_{0i}')=\pi(f_{0i})$. Так как группа F_0 свободна, получим морфизм $\varphi_0:F_0\to F_0'$. Теперь сопоставим всякой образующей $f_{1i}\in F_1$ элемент из $f_{1i}'\in F_1'$, такой что $\alpha'(f_{0i}')=\varphi_0(\alpha(f_{0i}))$ (это возможно, так как $\pi'(\varphi_0(\alpha(f_{0i})))=\pi(\alpha(f_{0i}))=0$). Так как группа F_1 свободна, получим морфизм $\varphi_1:F_1\to F_1'$. Теперь заметим, что любые два морфизма комплексов $\varphi_\bullet,\psi_\bullet:F_\bullet\to F_\bullet'$, индуцирующий тождественный морфизм $A=H_\bullet(F_\bullet)\to H_\bullet(F_\bullet')=A$, гомотопны. Действительно, сопоставим всякой образующей $f_{0i}\in F_0$ элемент из $f_{1i}''\in F_1'$, такой что $\alpha'(f_{1i}'')=\psi_0(f_{0i})-\varphi_0(f_{0i})$ (это возможно, так как $\pi'(\psi_0(f_{0i})-\varphi_0(f_{0i}))=\pi(f_{0i})-\pi(f_{0i})=0$). Так как группа F_0 свободна, получим морфизм $h:F_0\to F_1'$. Так как $\alpha'\circ(\psi_1-\varphi_1)=(\psi_0-\varphi_0)\circ\alpha=\alpha'\circ h\circ\alpha$, и α' — вложение, то $\psi_1-\varphi_1=h\circ\alpha$ и h — искомая гомотопия.

Теперь сделваем так: выберем морфизмы комплексов $\varphi_\bullet:F_\bullet\to F_\bullet'$ и $\psi_\bullet:F_\bullet'\to F_\bullet$, индуцирующие тождественный морфизм на A. Тогда $\varphi_\bullet\circ\psi_\bullet$ и $\psi_\bullet\circ\varphi_\bullet$ — морфизмы комплексов $F_\bullet'\to F_\bullet'$ и $F_\bullet\to F_\bullet$, индуцирующие тождественный морфизм на A, поэтому они гомотопны тождественным морфизмам, то есть $\varphi_\bullet$ и $\psi_\bullet$ гомотопически взаимно обратны. Остается заметить, что применение функторов $-\otimes B$ и $\mathrm{Hom}(-,B)$ переводит гомотопически взаимно обратные морфизмы в гомотопически взаимно обратные, то есть индуцирующие изоморфизм на группах $\mathrm{Tor}_1(A,B)$ и $\mathrm{Ext}^1(A,B)$ соответственно. ☐

Следствие 2.3. *Если группа* A *свободна, то* $\mathrm{Tor}_1(A,B)=\mathrm{Ext}^1(A,B)=0$ *и последовательности* $0\to F_1\otimes B\xrightarrow{\alpha}F_0\otimes B\xrightarrow{\pi}A\otimes B\to 0$ *и* $0\to\mathrm{Hom}(A,B)\xrightarrow{\pi^*}\mathrm{Hom}(F_0,B)\xrightarrow{\alpha^*}\mathrm{Hom}(F_1,B)\to 0$ *точны для всех* B.

Доказательство: выберем резольвенту с $F_0=A$, $F_1=0$. ☐

Часть 3. Формулы универсальных коэффициентов

Теорема 3.1. *Существуют канонические точные последовательности*

$$0\to H_n(X)\otimes G\to H_n(X,G)\to\mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(X),G)\to 0,$$
$$0\to\mathrm{Ext}^1(H_{n-1}(X),G)\to H^n(X,G)\to\mathrm{Hom}(H_n(X),G)\to 0.$$

Доказательство: разрежем $C_\bullet(X)$ на тройки $0\to Z_n\to C_n(X)\to B_{n-1}\to 0$ и $0\to B_n\to Z_n\to H_n\to 0$. Заметим, что группа B_{n-1} является подгруппой в свободной группе $C_{n-1}(X)$ и поэтому сама свободна. Применяя функтор $-\otimes G$ получаем точные последовательности $0\to Z_n\otimes G\to C_n(X,G)\to B_{n-1}\otimes G\to 0$, $0\to\mathrm{Tor}_1(H_n,G)\to B_n\otimes G\to Z_n\otimes G\to H_n\otimes G\to 0$. Дифференциал $\partial_G:C_n(X,G)\to C_{n-1}(X,G)$ очевидно раскладывается в композицию $C_n(X,G)\to B_{n-1}\otimes G\to Z_{n-1}\otimes G\to C_{n-1}(X,G)$ откуда получаем точную последовательность $0\to Z_n\otimes G\to\mathrm{Ker}\,\partial_G\to\mathrm{Tor}_1(H_{n-1},G)\to 0$ и изоморфизм между $\mathrm{Im}\,\partial_G$ и образом $B_n\otimes G$ в $Z_n\otimes G$. Факторизуя, получаем точную последовательность для $H_n(X,G)$.

Функтор $\mathrm{Hom}(-,G)$ дает точные последовательности $0\to\mathrm{Hom}(B_{n-1},G)\to C^n(X,G)\to\mathrm{Hom}(Z_n,G)\to 0$, $0\to\mathrm{Hom}(H_n,G)\to\mathrm{Hom}(Z_n,G)\to\mathrm{Hom}(B_n,G)\to\mathrm{Ext}_1(H_n,G)\to 0$. Дифференциал $\delta^G:C^n(X,G)\to C^{n+1}(X,G)$ очевидно раскладывается в композицию $C^n(X,G)\to\mathrm{Hom}(Z_n,G)\to\mathrm{Hom}(B_n,G)\to C^{n+1}(X,G)$ откуда получаем точную последовательность $0\to\mathrm{Hom}(B_{n-1},G)\to\mathrm{Ker}\,\delta^G\to\mathrm{Hom}(H_n,G)\to 0$ и изоморфизм между $\mathrm{Im}\,\delta^G$ и образом $\mathrm{Hom}(Z_{n-1},G)$ в $\mathrm{Hom}(B_{n-1},G)$. Факторизуя, получаем точную последовательность для $H^n(X,G)$. ☐

Лемма 3.2. *Существуют неканонические изоморфизмы*

$$H_n(X,G)\cong H_n(X)\otimes G\oplus\mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(X),G),\qquad H^n(X,G)\cong\mathrm{Hom}(H_n(X),G)\oplus\mathrm{Ext}^1(H_{n-1}(X),G).$$

Доказательство: так как группа B_{n-1} свободна, то точная тройка $0\to Z_n\to C_n(X)\to B_{n-1}\to 0$ расщепляется, то есть существует (неканонический!) изоморфизм $C_n(X)\cong Z_n\oplus B_{n-1}$, при котором вложение $Z_n\to C_n(X)$ есть вложение на первое слагаемое, а проекция $C_n(X)\to B_{n-1}$ — проекция на второе слагаемое. Пользуясь такими изоморфизмами раскладываем комплекс $C_\bullet(X)=\oplus_n(\dots\to 0\to B_n\to Z_n\to 0\to\dots)$. Так как функторы $-\otimes G$ и $\mathrm{Hom}(-,G)$ коммутируют с прямыми суммами, то

$$C_\bullet(X,G)=\oplus_n(\dots\to 0\to B_n\otimes G\to Z_n\otimes G\to 0\to\dots),$$
$$C^\bullet(X,G)=\oplus_n(\dots\to 0\to\mathrm{Hom}(Z_n,G)\to\mathrm{Hom}(B_n,G)\to 0\to\dots),$$

и рассматривая последовательность $0 \to B_n \to Z_n \to H_n \to 0$ как резольвенту группы H_n, получаем искомые изоморфизмы. $\square$

Часть 4. Формула Кюннета

Опишем гомологии и когомологии произведения двух пространств. Пусть X и X' — конечные клеточные пространства. Тогда $X \times X'$ — конечное клеточное пространство, а его клетки имеют вид $e^n_\alpha \times e^m_\beta$, $\alpha \in \mathsf{C}^X_n$, $\beta \in \mathsf{C}^{X'}_m$. Таким образом, $\mathsf{C}^{X\times X'}_n = \sqcup_{p+q=n} \mathsf{C}^X_p \times \mathsf{C}^{X'}_q$. Рассмотрим клеточный комплекс пространства $X \times X'$. Имеем $\mathcal{C}_n(X \times X') = \oplus_{p+q=n} \mathcal{C}_p(X) \otimes \mathcal{C}_q(X')$.

Предложение 4.1. *Если $c \in \mathcal{C}_p(X)$, $c' \in \mathcal{C}_q(X')$, то*

$$\partial(c \otimes c') = (\partial c) \otimes c' + (-1)^p c \otimes (\partial c') \in \mathcal{C}_{p-1}(X) \otimes \mathcal{C}_q(X') \oplus \mathcal{C}_p(X) \otimes \mathcal{C}_{q-1}(X') \subset \mathcal{C}_{p+q-1}(X \times X').$$

Доказательство: явная проверка — нужно убедиться, что отображение $S^{p+q-1} = \partial(D^{p+q}) \cong \partial(D^p \times D^q) = S^{p-1} \times D^q \cup D^p \times S^{q-1} \to S^{p+q-1} \vee S^{p+q-1}$ индуцирует отображения $\gamma \mapsto (\gamma, (-1)^p\gamma)$ в гомологиях. $\square$

Теорема 4.2. *Если X и X' — клеточные пространства, то*

$$H_n(X \times X') \cong \left(\bigoplus_{p+q=n} H_p(X) \otimes H_q(X')\right) \oplus \left(\bigoplus_{p+q=n-1} \operatorname{Tor}_1(H_p(X), H_q(X'))\right).$$

Доказательство: представим как и выше клеточные комплексы $\mathcal{C}_\bullet(X)$ и $\mathcal{C}_\bullet(X')$ в виде прямой суммы комплексов $\cdots \to 0 \to B_p \to Z_p \to 0 \to \ldots$ и $\cdots \to 0 \to B'_q \to Z'_q \to 0 \to \ldots$. Тогда комплекс $\mathcal{C}_\bullet(X \times X')$ разложится в прямую сумму комплексов $\cdots \to 0 \to B_p \otimes B'_q \to Z_p \otimes B'_q \oplus B_p \otimes Z'_q \to Z_p \otimes Z'_q \to 0 \to \ldots$. Рассматривая точные последовательности $0 \to B_p \to Z_p \to H_p(X) \to 0$ и $0 \to B'_q \to Z'_q \to H_q(X') \to 0$ как свободные резольвенты групп $H_p(X)$ и $H_q(X')$, и пользуясь следующей леммой, получаем утверждение теоремы. $\square$

Лемма 4.3. *Если $0 \to F_1 \xrightarrow{\alpha} F_0 \to A \to 0$ и $0 \to G_1 \xrightarrow{\beta} G_0 \to B \to 0$ — свободные резольвенты, то когомологии комплекса $0 \longrightarrow F_1 \otimes G_1 \xrightarrow{(\alpha,-\beta)} F_0 \otimes G_1 \oplus F_1 \otimes G_0 \xrightarrow{(\beta,\alpha)} F_0 \otimes G_0 \longrightarrow 0$ равны $\operatorname{Tor}_1(A,B)$ в среднем члене и $A \otimes B$ в правом члене.*

Доказательство: применим лемму о змее к точной тройке комплексов

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_1 \otimes G_1 \arrow[r, "{(\alpha,-\mathrm{Id})}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & F_0 \otimes G_1 \oplus F_1 \otimes G_1 \arrow[r, "{(1,\alpha)}"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & \beta\end{smallmatrix}\right)"] & F_0 \otimes G_1 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_1 \otimes G_1 \arrow[r, "{(\alpha,-\beta)}"] \arrow[d] & F_0 \otimes G_1 \oplus F_1 \otimes G_0 \arrow[r, "{(\beta,\alpha)}"] \arrow[d] & F_0 \otimes G_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & F_1 \otimes B \arrow[r] & F_0 \otimes B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Легко видеть, что верхняя строка ациклична, поэтому когомологии средней строки равны когомологиям нижней строки, то есть $\operatorname{Tor}_1(A,B)$ и $A \otimes B$ в среднем и правом членах соответственно. $\square$

Замечание 4.4. Используя когомологические цепные комплексы легко вывести, что

$$H^n(X \times X') \cong \left(\bigoplus_{p+q=n} H^p(X) \otimes H^q(X')\right) \oplus \left(\bigoplus_{p+q=n+1} \operatorname{Tor}_1(H^p(X), H^q(X'))\right).$$

Замечание 4.5. Как и в формулах универсальных коэффициентов разложение гомологий произведения в прямую сумму неканонично. Каноническими являются лишь точные последовательности

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(X) \otimes H_q(X') \longrightarrow H_n(X \times X') \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \operatorname{Tor}_1(H_p(X), H_q(X')) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} H^p(X) \otimes H^q(X') \longrightarrow H^n(X \times X') \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n+1} \operatorname{Tor}_1(H^p(X), H^q(X')) \longrightarrow 0.$$