Гомотопические группы клеточных пространств

Часть 1. Теорема о клеточной аппроксимации

Теорема 1.1. *Всякое отображение клеточных пространств гомотопно клеточному отображению.*

Доказательство: построим индуктивно отображения $f^0, \ldots, f^n : X \to Y$, такие что $f \sim f^n$, $f^n(\mathrm{sk}_n X) \subset \mathrm{sk}_n Y$ и $f^n_{|\mathrm{sk}_{n-1}X} = f^{n-1}_{\mathrm{sk}_{n-1}(X)}$. Чтобы построить f^n надо подправить f^{n-1} на клетках e^n_α, так чтобы $f^n(e^n_\alpha) \subset \mathrm{sk}_n Y$. Предположим, что $f^{n-1}(e^n_\alpha) \not\subset \mathrm{sk}_n Y$. Пусть $e^m_\beta \subset Y$ — клетка максимальной размерности, пересекающая $f^{n-1}(e^n_\alpha)$, так что $m > n$. Пусть $U = f^{n-1}(e^m_\beta) \cap e^n_\alpha$ и рассмотрим отображение

$$g : U \to \overline{e^n_\alpha} \subset \mathrm{sk}_{n-1}X \cup e^n_\alpha \xrightarrow{f^{n-1}} \mathrm{sk}_m Y \to \mathrm{sk}_m Y/(\mathrm{sk}_m Y \setminus e^m_\beta) \cong D^m/S^{m-1}.$$

По лемме о свободной точке, найдется отображение $g' : U \to D^m/S^{m-1}$ и неподвижная на ∂U гомотопия $g \sim g'$, так что $g'(U) \neq D^m/S^{m-1}$. Ясно, что g' пропускается через отображение $f' : \mathrm{sk}_{n-1}X \cup e^n_\alpha \to \mathrm{sk}_m Y$,

$$U \subset e^n_\alpha \subset \mathrm{sk}_{n-1}X \cup e^n_\alpha \xrightarrow{f'} \mathrm{sk}_m Y \to \mathrm{sk}_m Y/(\mathrm{sk}_m Y \setminus e^m_\beta) \cong D^m/S^{m-1}.$$

совпадающее с f вне U, а гомотопия продолжается до гомотопии $f^{n-1}_{|\mathrm{sk}_{n-1}X \cup e^n_\alpha} \sim f'$, неподвижной вне U. Заметим, что по построению найдется точка $y \in e^m_\beta$, не лежащая в образе f'. Гомотопическая эквивалентность $D^m \setminus y \to S^{m-1}$ дает отображение $f'' : \mathrm{sk}_{n-1}X \cup e^n_\alpha \to \mathrm{sk}_m Y \setminus e^m_\beta$, совпадающее с f' вне U и гомотопное f'. Повторяя описанную процедуру несколько раз, получим отображение $f_\alpha : \mathrm{sk}_{n-1}X \cup e^n_\alpha \to \mathrm{sk}_n Y$, гомотопное $f^{n-1}_{|\mathrm{sk}_n X}$ и совпадающее с ним на $\mathrm{sk}_{n-1}X$. Проделывая такую гомотопию одновременно на всех n-мерных клетках, получаем отображение $\tilde{f}^n : \mathrm{sk}_n X \to \mathrm{sk}_n Y$, гомотопное отображению $f^{n-1}_{|\mathrm{sk}_n X}$ и совпадающее с ним на $\mathrm{sk}_{n-1}X$. Наконец, пользуясь теоремой Борсука, продолжаем гомотопию $\tilde{f}^n \sim f^{n-1}_{|\mathrm{sk}_n X}$ до гомотопии $f^n \sim f^{n-1}$, где f^n — некоторое продолжение $\tilde{f}^n$ на все X. Остается заметить, что отображения f^n склеиваются в непрерывное клеточное отображение $f^\infty : X \to Y$, а гомотопии $f \sim f^0 \sim f^1 \sim \ldots$ (первая гомотопия производится на отрезке $[0, 1/2]$, вторая — на отрезке $[1/2, 3/4]$ и т.д.) — в гомотопию $f \sim f^\infty$. □

Следствие 1.2. *Если Y не имеет клеток размерностей от 1 до n, то $\pi_m(Y) = 0$ при $1 \leqslant m \leqslant n$.*

Доказателство: рассмотрим клеточную структуру на S^m из двух клеток. Тогда всякое клеточное отображение $S^m \to Y$ переводит $S^m = \mathrm{sk}_m S^m$ в $\mathrm{sk}_m Y = \mathrm{sk}_0 Y$, то есть в точку. Следовательно, по теореме о клеточной аппроксимации всякий сфероид $\sigma : S^m \to Y$ гомотопен тривиальному. □

Лемма 1.3. *Если Y — связное клеточное пространство и $\pi_m(Y) = 0$ при $1 \leqslant m \leqslant n$, то Y гомотопически эквивалентно пространству с одной нульмерной клеткой и без клеток размерностей от 1 до n.*

Доказательство: выберем одну нульмерную клетку $e^0 \subset Y$. Так как Y связно, для каждой нульмерной клетки e^0_α найдется путь $s_\alpha : I \to Y$, такой что $s_\alpha(0) = e^0$, $s_\alpha(1) = e^0_\alpha$. По теореме о клеточной аппроксимации можно считать, что $s_\alpha(I) \subset \mathrm{sk}_1 Y$. Для каждого α приклеим к Y круг D^2 вдоль нижней полуокружности, отображая ее в Y посредством s_α. Получим клеточное пространство Y'_0. Ясно, что Y'_0 гомотопически эквивалентно Y (каждый круг можно «смять» на нижнюю полуокружность). Объединение верхних полуокружностей приклеенных кругов является клеточным подпространством в Y'_0, причем оно изоморфно букету отрезков, и следовательно стягиваемо. Поэтому $Y'_0 \sim Y_0 := Y'_0/\vee_\alpha I_\alpha$, а Y_0 имеет только одну нульмерную клетку.

Предположим по индукции, что $Y_{m-1} \sim Y$, имеет только одну нульмерную клетку и не имеет клеток размерностей от 1 до $m-1$, и пусть $\pi_m(Y_{m-1}) = \pi_m(Y) = 0$. Характеристическое отображение $\chi_\alpha : D^m \to Y_{m-1}$ для каждой m-мерной клетки $e^m_\alpha \subset Y_{m-1}$ переводит S^{m-1} в $\mathrm{sk}_{m-1}Y_{m-1} = e^0$, поэтому его можно рассматривать как сфероид $S^m = D^m/S^{m-1} \to Y_{m-1}$. По предположению, он гомотопен тождественному сфероиду, поэтому найдется отображение $f_\alpha : D^{m+1} \to Y_{m-1}$, такое что $f_{\alpha|S^m} = \chi_\alpha$. По теореме о клеточной аппроксимации можно считать, что $f_\alpha(D^{m+1}) \subset \mathrm{sk}_{m+1}Y$. Для каждого α приклеим к Y шар D^{m+2} вдоль нижней полусферы, отображая ее в Y посредством f_α. Получим клеточное пространство Y'_m. Ясно, что Y'_m гомотопически эквивалентно Y_{m-1} (каждый шар можно «смять» на нижнюю полусферу). Объединение верхних полуосфер приклеенных шаров является клеточным подпространством в Y'_m, причем оно изоморфно букету шаров, и следовательно стягиваемо. Поэтому $Y'_m \sim Y_m := Y'_{m-1}/\vee_\alpha D^{m+1}_\alpha$, а Y_m не имеет клеток размерностей от 1 до m. □

Часть 2. Младшая гомотопическая группа

Предложение 2.1. *Пусть $f : S^n \to X$ — сфероид и $Y = X \cup_f D^{n+1}$. Тогда $\pi_m(X) = \pi_m(Y)$ при $m < n$, а $\pi_n(Y)$ есть факторгруппа группы $\pi_n(X)$ по подгруппе, порожденной элементами $\alpha_\#(f)$ по всем $\alpha \in \pi_1(X)$.*

Доказательство: пусть $m \leqslant n$ и $\sigma : S^m \to Y$ — сфероид. Применяя лемму о свободной точке к отображению $S^m \xrightarrow{\sigma} Y \to Y/X = D^{n+1}/S^n = S^{n+1}$ можно считать, что $\sigma(S^m)$ не содержит внутренность приклеенного шара, и потому σ гомотопен отображению в X. Таким образом, отображение $\pi_m(X) \to \pi_m(Y)$, индуцированное вложением $X \to Y$, эпиморфно при $m \leqslant n$.

Если $\sigma : S^m \to X$ лежит в ядре гомоморфизма $\pi_m(X) \to \pi_m(Y)$, то найдется отображение $G : D^{m+1} \to Y$, такое что $G_{|S^m} = \sigma$. Применяя лемму о свободной точке к отображению $D^{m+1} \xrightarrow{G} Y \to Y/X = D^{n+1}/S^n = S^{n+1}$ можно показать, что при $m < n$ отображение G гомотопно отображению в X, следовательно $\sigma = 0$ в $\pi_m(X)$. Значит, $\pi_m(X) = \pi_m(Y)$ при $m < n$. Если же $m = n$, то можно считать, что отображение $D^{n+1} \xrightarrow{G} Y \to Y/X = D^{n+1}/S^n = S^{n+1}$ имеет регулярное значение $y \in \mathrm{Int}(D^{n+1})$. Множество $G^{-1}(y)$ замкнуто в D^{n+1}, следовательно конечно. Пусть $G^{-1}(y) = \{ x_1, \dots, x_k \}$. Отображение G гладко в каждой из точек x_i, а его матрица Якоби невырождена, следовательно по теореме об обратной функции оно задает гомеоморфизм маленького шарика $D(x_i) \subset D^{n+1}$ с центром в x_i, и маленького шарика $D(y) \subset D^{n+1}$ с центром в y, а $G(D^{n+1} \setminus \cup D(x_i)) \subset Y \setminus D(y)$. Растягивая шар $D(y)$ на весь D^{n+1} можно считать, что $G(D^{n+1} \setminus \cup D(x_i)) \subset X$, а $G_{|\partial D(x_i)} = f \circ \varphi_i$, где $\varphi_i : \partial D(x_i) \to S^n$ — гомеомофризм. Можно считать, что шары $D(x_i)$ попарно не пересекаются. Соединим шары $D(x_i)$ попарно непересекающимися путями $\alpha^i : I \to D^{n+1}$ с точкой $x_0 \sin S^n \subset D^{n+1}$ и «сожмем» шар D^{n+1} на объединение шаров $D(x_i)$ и путей α^i. В результате получим гомотопию сфероида σ и сфероида $\prod \alpha^i_\#(f \circ \varphi_i)$. Но φ_i — гомеоморфизм, поэтому либо $f \circ \varphi_i = f$, либо $f \circ \varphi_i = f^{-1}$ в группе $\pi_n(X)$ (в зависимости от того, сохраняет φ_i ориентацию или нет. Окончательно получаем, что $\sigma = \prod \alpha^i_\# f^{\pm 1}$ и теорема доказана. □

Следствие 2.2. *Если X — клеточное пространство, то $\pi_n(X) = \pi_n(\mathrm{sk}_{n+1}X)$.*

Доказательство: X получается из $\mathrm{sk}_{n+1}X$ приклеиванием клеток размерностей $n+2$, $n+3$, … □

Следствие 2.3. *При $n > 1$ имеем $\pi_n(\vee_{\alpha \in A} S^n) = \oplus_{\alpha \in A}\mathbb{Z} f_\alpha$ при $n > 1$*

Доказательство: $\pi_n(\vee_{\alpha \in A} S^n) = \pi_n(\mathrm{sk}_{n+1}(\prod_{\alpha \in A} S^n)) = \pi_n(\prod_{\alpha \in A} S^n) = \oplus_{\alpha \in A}\pi_n(S^n) = \oplus_{\alpha \in A}\mathbb{Z} f_\alpha$. □

Лемма 2.4. $\pi_1(\vee_{\alpha \in A} S^1) = F(\{ f_\alpha \})$ *— свободная группа с множеством образующих $\{ f_\alpha \}_{\alpha \in A}$.*

Доказательство: рассмотрим клеточное пространство X, в котором нульмерные клетки нумеруются элементами группы $F(\{ f_\alpha \})$, а одномерные — парами (g, α), где $g \in F(\{ f_\alpha \})$ (клетка $e^1_{(g,\alpha)}$ соединяет клетки e^0_g и $e^0_{gf_\alpha}$). Легко видеть, что группа $F(\{ f_\alpha \})$ действует на X (элемент g переводит $e^0_{g',\alpha}$ в $e^0_{gg'}$, а $e^1_{g',\alpha}$ в $e^1_{gg',\alpha}$), причем ясно, что $X/F(\{ f_\alpha \}) \cong \vee_{\alpha \in A} S^1$. С другой стороны, очевидно что X стягиваемо (назовем «высотой» вершины длину кратчайшей записи соответствующего элемента группы и стянем на k-ом шаге все 1-мерные клетки, выходящие из вершин высоты k). Поэтому $\pi_1(\vee_{\alpha \in A} S^1) = F(\{ f_\alpha \})$. □

Пусть X — клеточное пространство без клеток размерностей от 1 до $n-1$ и с одной нульмерной клеткой. Тогда $\mathrm{sk}_n(X) = \vee_{\alpha \in \mathsf{C}^X_n} S^n$ и $\pi_n(\mathrm{sk}_n X)$ есть свободная (абелева при $n > 1$) группа. Всякой $(n+1)$-мерной клетке β в X сопоставим элемент φ_β этой группы, соответствующий отображению $\chi_{\beta|S^n} : S^n \to \mathrm{sk}_n X$.

Теорема 2.5. *Группа $\pi_n(X)$ изоморфна факторгруппе свободной (абелевой при $n > 1$) группы с множеством образующих C^X_n по нормальной подгруппе, порожденной элементами φ_β.*

Доказательство: приклеивание клетки e_β^{n+1} факторизует группу π_n по подгруппе, порожденной элементами $\{\,\alpha_\#(\varphi_\beta)\,\}_{|\alpha\in\pi_1}$. При $n=1$ имеем $\alpha_\#(\varphi_\beta)=\alpha\beta\alpha^{-1}$, поэтому это как раз нормальная подгруппа, порожденная элементом φ_β, а при $n>1$ имеем $\pi_1=0$, поэтому это просто подгруппа порожденная элементом φ_β, (которая автоматически нормальна в силу коммутативности группы π_n). $\square$

Часть 3. Пространства $K(\pi, n)$

Лемма 3.1. *Пусть X — связное клеточное пространство, а $\pi=\pi_n(X)$ — его младшая гомотопическая группа. Существует клеточное пространство $X^{(n)}$ и клеточное отобаржение $p: X\to X^{(n)}$, такие что $p_*:\pi=\pi_n(X)\to\pi_n(X^{(n)})$ — изоморфизм, и $\pi_m(X^{(n)})=0$при $m\neq n$.*

Доказательство: выберем систему образующих в группе $\pi_{n+1}(X)$ и «заклеим» каждую из них $(n+2)$-мерной клеткой. Далее, выберем систему образующих в группе π_{n+2} полученного пространства и заклеим каждую из них $(n+3)$-мерной клеткой. Продолжая действовать таким образом, получим искомое пространство. $\square$

Теорема 3.2. *Для любого числа $n\geqslant 1$ и группы π (абелевой при $n>1$) существует клеточное пространство X с $\pi_n(X)=\pi$ и $\pi_m(X)=0$ при $m\neq n$. Такое пространство единственно с точностью до гомотопической эквивалентности.*

Доказательство: выбрав в группе π систему образующих и порождающих соотношений построим $\mathrm{sk}_{n+1}X$ приклеивая к букету сфер $\vee S^n$, соответствующих образующим, сферы S^{n+1} в соответствии с соотношениями, а затем, заклеивая последовательно все высшие гомотопические группы, получим X.

Пусть теперь X и Y — два таких пространства. Вначале построим клеточное простраство X' и гомотопическую эквивалентность $f: X\to X'$, так что $\mathrm{sk}_n X'$ — букет n-мерных сфер. Каждой из этих сфер соответствует элемент группы $\pi_n(X)=\pi=\pi_n(Y)$. Представляя его сфероидом в Y, получим отображение $f_n:\mathrm{sk}_n X'\to Y$. Покажем, что оно продолжается до отображения $f_m:\mathrm{sk}_m X'$ для всех $m>n$. Для этого надо проверить, что для каждой клетки $e_\alpha^m\subset X'$ с $m>n$ отображение $\varphi_\alpha=f_{m-1}\circ\chi_{\alpha|S^{m-1}}: S^{m-1}\to Y$ гомотопно нулю. Для $m=n+1$ это верно, так как φ_α являются соотношениями между образующими группы $\pi=\pi_n(Y)$, а для $m>n+1$ — так как $\pi_{m-1}(Y)=0$. Ясно, что отображения f_m склеиваются в отображение $f: X'\to Y$, компонируя которое с f получаем искомую эквивалентность. $\square$

Определение 3.3. Пространство X с $\pi_n(X)=\pi$ и $\pi_m(X)=0$ при $m\neq n$ называется пространством типа $K(\pi,n)$ (или даже просто пространством $K(\pi,n)$).

Часть 4. Теорема Гуревича

Сопоставим всякому сфероиду $\sigma: S^n\to X$ отображение $\sigma_*: H_n(S^n)\to H_n(X)$ и обозначим через $h(\sigma)$ образ $1\in\mathbb{Z}\cong H_n(S^n)$ в $H_n(X)$. Полученное отображение h называется гомоморфизмом Гуревича.

Лемма 4.1. *Отображение $h:\pi_n(X)\to H_n(X)$ — корректно определено и является гомоморфизмом групп.*

Доказательство: корректность следует из аксиомы гомотопии — если $\sigma\sim\sigma'$, то $\sigma_*=\sigma'_*$. Чтобы проверить гомоморфность h, надо убедиться, что отображение $S^n\to S^n\vee S^n$ (с помощью которого определялась групповая операция в π_n) переводит $1\in\mathbb{Z}=H_n(S^n)$ в $(1,1)\in\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}=H_n(S^n\vee S^n)$, что очевидно, например, из клеточного комплекса. $\square$

Лемма 4.2. *Гомоморфизм Гуревича $h:\pi_n(S^n)\to H_n(S^n)$ — изоморфизм.*

Доказательство: h переводит образующую $\pi_n(S^n)$ (тождественный сфероид) в $1\in H_n(S^n)$. $\square$

Лемма 4.3. *Гомоморфизм Гуревича h функториален, то есть $h\circ f_*=f_*\circ h$ для любого $f: X\to Y$.*

Доказательство: $h(f_*(\sigma))=h(f\circ\sigma)=(f\circ\sigma)_*(1)=f_*(\sigma_*(1))=f_*(h(\sigma))$. $\square$

Теорема 4.4. *Если $\pi_m(X)=0$ при $m<n$, то h индуцирует изоморфизм $\pi_n(X)\cong H_n(X)$ при $n>1$ и изоморфизм $\pi_1(X)/[\pi_1(X),\pi_1(X)]\cong H_1(X)$ при $n=1$.*

Доказательство: если X — клеточное пространство, то можно считать, что X не имеет клеток размерностей от 1 до $n-1$. Сравнивая описание $\pi_n(X)$ через клеточную структуру и вычисление $H_n(X)$ с помощью клеточного комплекса, и пользуясь функториальностью h получаем теорему. $\square$