Задачи по топологии к 10 сентября 2004 г.

1. Пусть X — топологическое пространство, и $Y \subset X$. Покажите, что $\overline{Y}$ — это наименьшее замкнутое подмножество, содержащее Y, а $\mathrm{Int}(Y)$ — это наибольшее открытое подмножество, содержащееся в Y.

2. Пусть X — топологическое пространство. Докажите, что
a) $Y \subset X$ — замкнуто $\iff$ Y содержит все свои предельные точки; b) $\overline{Y} = Y \cup \{$ все предельные точки Y $\}$.

3. Граница множества $Y \subset X$ определяется как $\partial Y = \overline{Y} \setminus \mathrm{Int}(Y)$. Докажите, что
a) $\partial Y = X \setminus (\mathrm{Int}(Y) \cup \mathrm{Int}(X \setminus Y))$; b) $\partial Y = \overline{Y} \cap \overline{X \setminus Y}$;
c) $\overline{Y} = Y \cup \partial Y$; d) $\mathrm{Int}(Y) = Y \setminus \partial Y$; e) ∂Y — замкнута; f) $\partial D^n = S^{n-1}$.

4. Докажите, что a) класс подмножеств $\mathcal{B}$ является базой некоторой топологии на X $\iff$ $\forall U, V \in \mathcal{B}$, $\forall x \in U \cap V\ \exists W \in \mathcal{B}$, так что $x \in W \subset U \cap V$;
b) любой класс подмножеств является предбазой некоторой топологии на X.

5. Пусть X — множество, а $Y \mapsto Y^c$ — операция на его подмножествах, удовлетворяющая аксиомам Куратовского: $\emptyset^c = \emptyset$, $Y \subset Y^c$, $Y^{cc} = Y^c$ и $(Y_1 \cup Y_2)^c = Y_1^c \cup Y_2^c$. Докажите, что все подмножества Z в X, такие что $Z^c = Z$ образуют класс замкнутых подмножеств в некоторой топологии на X, а $Y^c = \overline{Y}$ в этой топологии.

6. Докажите, что отображение топологических пространств $f : X \to Y$ непрерывно $\iff$
a) прообраз замкнутых множеств замкнут; b) прообраз всех элементов некоторой предбазы открыт;
c) $\forall x \in X$ прообраз всякой окрестности точки $f(x)$ открыт;
d) $\forall x \in X$ и любого открытого $V \ni f(x)$ найдется открытое $U \ni x$, так что $f(U) \subset V$;
e) $f(\overline{Y}) \subset \overline{f(Y)}$; f) $\overline{f^{-1}(Y)} \subset f^{-1}(\overline{Y})$.

7. Докажите, что a) замыкание связного множества связно; b) образ связного множества связен;
c) всякое множество есть несвязное объединение максимальных связных подмножеств (компонент связности);
d) связное локально линейно связное пространство линейно связно.

8. Докажите, что если факторпространство $X/\sim$ по отношению эквивалентности «$\sim$» хаусдорфово, то его график $\Gamma(\sim) = \{ (x_1, x_2) \in X \times X \mid x_1 \sim x_2 \}$ замкнут в $X \times X$.

9. Топология бесконечного произведения. Пусть $\{ X_\alpha \}_{\alpha \in A}$ — произвольное семейство топологических пространств. Топология на произведении $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ задается предбазой множеств $\left\{ U_\beta \times \prod_{\alpha \neq \beta} X_\alpha \right\}_{\beta \in A, U_\beta \subset X_\beta}$, где U_β — открыто. Докажите, что
a) если множество A конечно, то получается та же топология, что и определенная на лекции;
b) произведение хаусдорфовых пространств хаусдорфово;
c) произведение связных пространств связно;
d*) (теорема Тихонова) произведение компактов — компакт.

10. Топология проективного предела. Пусть $(X_\alpha, f_{\beta\alpha})$, $\alpha, \beta \in A$ — проективная система топологических пространств (т.е. A — частично упорядоченное множество, а $f_{\beta\alpha} : X_\beta \to X_\alpha$ — непрерывные отображения, заданные для всех $\alpha < \beta \in A$, так что $f_{\beta\alpha} \circ f_{\gamma\beta} = f_{\gamma\alpha}$ для всех $\alpha < \beta < \gamma \in A$). Топология на проективном пределе $\varprojlim X_\alpha = \{ (x_\alpha) \mid \forall \alpha < \beta\ f_{\beta\alpha}(x_\beta) = x_\alpha \}$ задается предбазой множеств $\{ (x_\alpha) \in \varprojlim X_\alpha \mid x_\beta \in U_\beta \}$, где U_β — открыто. Докажите, что
a) топология проективного предела индуцирована вложением $\varprojlim X_\alpha \to \prod_\alpha X_\alpha$;
b) пространства $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ вполне несвязны, но локально компактны;
c) $\hat{\mathbb{Z}} \cong \prod_p \mathbb{Z}_p$.

1. Докажите, что a) $C(\coprod_\alpha X_\alpha, Y) \cong \prod_\alpha C(X_\alpha, Y)$; b) $C(Y, \prod_\alpha X_\alpha) \cong \prod_\alpha C(Y, X_\alpha)$;
c) $C(X/A, Y) = \{\, f \in C(X,Y) \mid f(A)$ — точка$\,\}$; d) $C(X \cup_\varphi Y, Z) = \{\,(f,g) \in C(X,Z) \times C(Y,Z) \mid f_{|A} = g \circ \varphi\,\}$;
e) $C(X \times Y, Z) \cong C(X, C(Y,Z))$; f) $C_b(\Sigma X, Y) = C_b(X, \Omega Y)$.

2. Докажите, что a) $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^{4n}$; b) $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$, $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$, $\mathbb{HP}^1 \cong S^4$;
c) $\mathbb{RP}^n \cong S^n/\{\pm 1\}$, $\mathbb{CP}^n \cong S^{2n+1}/U(1)$, $\mathbb{HP}^n \cong S^{4n+3}/Sp(1)$;
d) $\mathbb{RP}^n$ получается из D^n отождествлением противоположных точек границы.

3. Докажите, что a) $\mathrm{Gr}(k,n) \cong \mathrm{Gr}(n-k,n)$, $\mathrm{Gr}_+(k,n) \cong \mathrm{Gr}_+(n-k,n)$; b) $\mathrm{Gr}(1,n) \cong \mathbb{RP}^{n-1}$, $\mathrm{Gr}_+(1,n) \cong S^{n-1}$.

4. Докажите, что a) отображение Плюккера $\mathrm{Gr}(k,n) \to \mathbb{RP}^{\binom{n}{k}-1}$, сопоставляющее матрице $k \times n$ ее миноры порядка k, является непрерывным вложением; b) $\mathrm{Gr}(2,4)$ задается в $\mathbb{RP}^5$ уравнением $\xi_{12}\xi_{34} - \xi_{13}\xi_{24} + \xi_{14}\xi_{23} = 0$;
c) придумайте вложение $\mathrm{Gr}_+(k,n) \to S^{\binom{n}{k}-1}$.

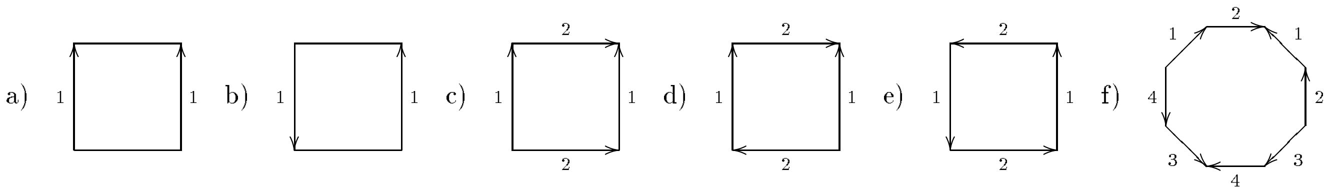
5. a) Докажите, что $\mathrm{Fl}(k_1, \dots, k_r; n) \cong \mathrm{Fl}(n-k_r, \dots, n-k_1; n)$.
b) Задайте $\mathrm{Fl}(1, n-1; n) \subset \mathrm{Gr}(1,n) \times \mathrm{Gr}(n-1,n) \cong \mathbb{RP}^{n-1} \times \mathbb{RP}^{n-1}$ явным уравнением.

6. Докажите, что a) $SO(2) \cong S^1$; b) $SO(3) \cong \mathbb{RP}^3$; c) $U(1) \cong S^1$; d) $SU(2) \cong S^3$; e) $Sp(1) \cong S^3$.

7. Докажите, что a) $V(n,n) \cong O(n)$, $V(n,n-1) \cong SO(n)$; b) $\mathbb{C}V(n,n) \cong U(n)$, $\mathbb{C}V(n,n-1) \cong SU(n)$;
c) $\mathbb{H}V(n,n) \cong Sp(n)$; d) $V(1,n) \cong S^{n-1}$, $\mathbb{C}V(1,n) \cong S^{2n-1}$, $\mathbb{H}V(1,n) \cong S^{4n-1}$.

8. Докажите, что
a) $S^{n-1} \cong O(n)/O(n-1) \cong SO(n)/SO(n-1)$, $S^{2n-1} \cong U(n)/U(n-1) \cong SU(n)/SU(n-1)$, $S^{4n-1} \cong Sp(n)/Sp(n-1)$;
b) $\mathrm{Gr}(k,n) \cong O(n)/(O(k) \times O(n-k))$, $\mathbb{C}\mathrm{Gr}(k,n) \cong U(n)/(U(k) \times U(n-k))$, $\mathbb{H}\mathrm{Gr}(k,n) \cong Sp(n)/(Sp(k) \times Sp(n-k))$;
c) $\mathrm{Gr}_+(k,n) \cong SO(n)/(SO(k) \times SO(n-k))$;
d) $\mathrm{Fl}(k_1, \dots, k_r; n) \cong O(n)/(O(k_1) \times O(k_2-k_1) \times \dots \times O(k_r - k_{r-1}) \times O(n-k_r))$;
e) $\mathbb{C}\mathrm{Fl}(1, \dots, n-1; n) \cong U(n)/(U(1) \times \dots \times U(1))$;
f) $V(k,n)/O(k) \cong \mathrm{Gr}(k,n)$, $\mathbb{C}V(k,n)/U(k) \cong \mathbb{C}\mathrm{Gr}(k,n)$, $\mathbb{H}V(k,n)/Sp(k) \cong \mathbb{H}\mathrm{Gr}(k,n)$, $V(k,n)/SO(k) \cong Gr_+(k,n)$.

9. Если есть многоугольник, некоторые стороны которого объединены в пары и помечены стрелками. Отождествляя их в соответствии с направлением стрелок, получаем поверхность. Покажите, что в следующих примерах получаются a) кольцо (сфера с двумя дырками); b) лента Мебиуса; c) тор; d) бутылка Клейна; e) проективная плоскость; f) крендель (сфера с двумя ручками):



10. Покажите, что всякая классическая поверхность может быть получена склеиванием из многоугольника как в предыдущей задаче.

11. Докажите, что a) последовательность $(a_1, 0, 0, \dots)$, $(0, a_2, 0, \dots)$, $\dots$, $(\dots, 0, a_n, 0, \dots)$, $\dots$ сходится в $\mathbb{R}^\infty$ $\iff a_k = 0$ при $k \gg 1$; b) топология прямого предела в S^∞, D^∞, I^∞, Δ^∞ совпадает с индуцированной с $\mathbb{R}^\infty$.
c) Компактны ли S^∞, D^∞, I^∞ и Δ^∞?

12. Докажите, что a) $\mathrm{Gr}_+(2,4) \cong S^2 \times S^2$; b) $SO(4) \cong S^3 \times SO(3)$.

13. Докажите, что a) $CS^n \cong D^{n+1}$; b) $\Sigma S^n \cong D^{n+1}$; c) если $f : S^n \to \mathbb{RP}^n$ — проекция, то $\mathrm{Con}(f) \cong \mathbb{RP}^{n+1}$.

14. Докажите, что a) $S^m \# S^n \cong S^{m+n}$; b) $\Sigma X \cong X \# S^1$.

15. Докажите, что a) $X_1 \sim X_2 \iff$ существует функториальный изоморфизм $\alpha : \pi(X_1, -) \to \pi(X_2, -)$, то есть набор изоморфизмов $\alpha_Y : \pi(X_1, Y) \to \pi(X_2, Y)$ для всех Y, так что для всех $f \in C(Y, Z)$ имеем $f_* \circ \alpha_Y = \alpha_Z \circ f_* : \pi(X_1, Y) \to \pi(X_2, Z)$, где $f_* : \pi(X_i, Y) \to \pi(X_i, Z)$ задается компонированием с f;
b) $X_1 \sim X_2 \iff$ существует функториальный изоморфизм $\beta : \pi(-, X_1) \to \pi(-, X_2)$.

16. Докажите стягиваемость a) всякого выпуклого множества в $\mathbb{R}^n$; b) сферы S^∞;
c) конуса CX; d) пространства путей $E(X, x_0)$.

17. Пусть $X \sim Y$, $Z \sim W$ и $f \in \pi(X, Z)$. Докажите, что a) $\Sigma X \sim \Sigma Y$; b) $X \times Z \sim Y \times W$;
c) $EX \sim EY$, $\Omega X \sim \Omega Y$; d) $C(X,Z) \sim C(Y,W)$; e) $\mathrm{Cyl}(f) \sim Z$.