Задачи по топологии к 12 ноября 2004 г.

1. Пользуясь спектральными последовательностями расслоений $S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ и $S^{4n+3} \to \mathbb{HP}^n$ вычислите
a) $H^\bullet(\mathbb{CP}^n)$; b) $H^\bullet(\mathbb{HP}^n)$.

2. Пользуясь действием группы $Sp(n)$ на S^{4n-1}, докажите, что $H^\bullet(Sp(2)) = H^\bullet(S^3 \times S^7)$.

3. a) Пусть $p : E \to B$ — расслоение со слоем F, такое что $\pi_1(B) = 0$, $H^{\mathsf{odd}}(F) = H^{\mathsf{odd}}(B) = 0$, а $H^{\mathsf{even}}(F)$ — свободная абелева группа. Покажите, что $H^\bullet(E) = H^\bullet(B) \otimes H^\bullet(F)$.
b) Пользуясь спектральными последовательностями расслоений $\mathbb{C}\mathrm{Fl}(k-1, k; n) \to \mathbb{C}\mathrm{Gr}(k-1, n)$ и $\mathbb{C}\mathrm{Fl}(k-1, k; n) \to \mathbb{C}\mathrm{Gr}(k, n)$ вычислите когомологии грассманианов.

4. Для всякого расслоения $p : E \to B$ со слоем F покажите, что $\chi(E) = \chi(B)\chi(F)$.

5. Докажите, что спектральная последовательность тривиального расслоения вырождается во втором члене (указание: сравните второй член спектральной последовательности с формулой Кюннета).

6. a) Постройте гомологическую спектральную последовательность расслоения и покажите, что ее второй член равен $E^2_{p,q} = H_q(B, H_p(F))$, а дифференциал $d^r_{p,q}$ отображает $E^r_{p,q}$ в $E^r_{p+r-1,q-r}$.
b) Покажите, что если $\pi_0(X) = \pi_1(X) = \dots = \pi_{n-1}(X) = 0$, то $H_r(X) = H_{r-1}(\Omega X)$ при $\leqslant 2n-2$.

7. (Последовательность Гизина.) Пусть $p : E \to B$ — расслоение со слоем S^n и $\pi_1(B) = 0$. Постройте точную последовательность $\dots \to H^m(B) \xrightarrow{p^*} H^m(E) \to H^{m-n}(B) \xrightarrow{d_{n+1}} H^{m+1}(B) \xrightarrow{p^*} H^{m+1-n}(E) \to \dots$

8. (Последовательность Вана.) Пусть $p : E \to S^n$ — расслоение со слоем F и $n \geqslant 2$. Постройте точную последовательность $\dots \to H^m(E) \xrightarrow{i^*} H^m(F) \xrightarrow{d_n} H^{m-n+1}(F) \to H^{m+1}(E) \xrightarrow{i^*} H^{m+1}(F) \to \dots$