Задачи по топологии к 19 ноября 2004 г.

1. Вычислите a) $H^\bullet(U(n))$; b) $H^\bullet(Sp(n))$; c) $H^\bullet(\mathbb{C}V(n,k))$.

2. Докажите, что $H^\bullet(L_m^\infty) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } n=0 \\ \mathbb{Z}_m, & \text{если } n \text{ четно и } n>0 \\ 0, & \text{если } n \text{ нечетно} \end{cases}$

(Указание: воспользуйтесь расслоением $L_m^\infty \to \mathbb{CP}^\infty$ и тем, что $H_1(L_m^\infty) = \pi_1(L_m^\infty) = \mathbb{Z}_m$.)

3. Докажите, что

a) $H^\bullet(K(\mathbb{Z}_m, n), \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$;

b) $H^\bullet(K(\mathbb{Z}, n), \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q}[h], & \text{если } n \text{ четно} \\ \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}[h], & \text{если } n \text{ нечетно} \end{cases}$ где $\deg h = n$;

c) если $\pi \otimes \mathbb{Q} = 0$, то $H^\bullet(K(\pi, n), \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$;

d) если $\pi \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$, то $H^\bullet(K(\pi, n), \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q}[h], & \text{если } n \text{ четно} \\ \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}[h], & \text{если } n \text{ нечетно} \end{cases}$ где $\deg h = n$.

4. Определим группы $\pi_n(X, \mathbb{Q})$ формулой $\pi_n(X,\mathbb{Q}) := \pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}$. Докажите, что

a) если $E \to B$ — расслоение со слоем F, то возникает длинная точная последовательность

$$\dots \to \pi_{n+1}(B,\mathbb{Q}) \to \pi_n(F,\mathbb{Q}) \to \pi_n(E,\mathbb{Q}) \to \pi_n(B,\mathbb{Q}) \to \pi_{n-1}(F,\mathbb{Q}) \to \dots$$

b) выполняется теорема Гуревича: если $\pi_0(X) = \pi_1(X) = \dots = \pi_{n-1}(X) = 0$, то $\pi_n(X,\mathbb{Q}) = H_n(X,\mathbb{Q})$;

c) группа $\pi_n(S^m, \mathbb{Q})$ равна $\mathbb{Q}$ при $n=m$ или $n = 2m-1$ и четном m, и нулю при прочих n, m;

d) группа $\pi_n(S^m)$ бесконечна $\iff n = m$ или $n = 2m-1$ и m четно.

5. a) Докажите, что в башне Постникова отображение $X_{|n+1} \to X_{|n}$ гомотопически эквивалентно расслоению со слоем $K(\pi_n(X), n-1)$. b) Воспользуйтесь этим для вычисления $\pi_4(S^3)$.

6. Докажите, что $X_{|2}$ гомотопически эквивалентно универсальному накрытию пространства X.

7. Докажите, что a) $S^2_{|3} \cong S^3$; b) $\pi_n(S^2) = \pi_n(S^3)$ при $n \geqslant 3$.