Задачи по топологии к 17 сентября 2004 г.

1. Покажите, что a) $\pi_n(X) = \pi_0(\Omega^n X)$, где $\Omega^n X = \underbrace{\Omega \ldots \Omega}_{n \text{ раз}} X$ — итерированное пространство петель;

b) $\pi_n(X) = \pi_k(\Omega^{n-k} X)$.

2. Пространство Y называется H-пространством, если даны отображения $\mu : Y \times Y \to Y$ и $\nu : Y \to Y$, т.ч.

$H1$: (гомотопическая ассоциативность) $\mu \circ (\mathrm{Id}_Y \times \mu) \sim \mu \circ (\mu \times \mathrm{Id}_Y) : Y \times Y \times Y \to Y$;
$H2$: (гомотопическая единица) $\mu \circ j_1 \sim \mathrm{Id}_Y \sim \mu \circ j_2 : Y \to Y$, где $j_1(y) = (y_0, y)$, $j_2(y) = (y, y_0)$;
$H3$: (гомотопически обратный) $\mu \circ (\mathrm{Id}_Y \times \nu) \sim \varepsilon \sim \mu \circ (\nu \times \mathrm{Id}_Y) : Y \to Y$, где $\varepsilon(y) = y_0$.

Докажите, что
a) $X \mapsto \pi_b(X, Y)$ — функтор в категорию групп $\iff Y$ — H-пространство;
b) $X \mapsto \pi_b(X, Y)$ — функтор в категорию абелевых групп $\iff Y$ (гомотопически) коммутативно.

3. Пространство Y называется H'-пространством, если даны отображения $\mu : Y \to Y \vee Y$ (коумножение) и $\nu : Y \to Y$ (кообращение), т.ч.

$H'1$: (гомотопическая коассоциативность) $\mu \circ (\mathrm{Id}_Y \vee \mu) \sim \mu \circ (\mu \vee \mathrm{Id}_Y) : Y \to Y \vee Y \vee Y$;
$H'2$: (гомотопическая коединица) $\pi_1 \circ \mu \sim \mathrm{Id}_Y \sim \pi_2 \circ \mu : Y \to Y$, где π_1, π_2 — стягивание $y_0 \vee Y$, $Y \vee y_0$;
$H'3$: (гомотопически кообратный) $(\mathrm{Id}_Y \vee \nu) \circ \mu \sim \varepsilon \sim (\nu \vee \mathrm{Id}_Y) \circ \mu : Y \to Y$, где $\varepsilon(y) = y_0$.

Докажите, что
a) $X \mapsto \pi_b(Y, X)$ — функтор в категорию групп $\iff Y$ — H'-пространство;
b) $X \mapsto \pi_b(Y, X)$ — функтор в категорию абелевых групп $\iff Y$ (гомотопически) кокоммутативно.

4. Пусть X — топологическое пространство. Докажите, что
a) ΩX — H-пространство; b) $\Omega\Omega X$ — гомотопически коммутативно;
c) ΣX — H'-пространство; d) $\Sigma\Sigma X$ — гомотопически кокоммутативно.

5. Определите свойство (BCHP) накрывающей гомотопии для пространств с отмеченными точками и докажите, что
a) локально тривиальные расслоения удовлетворяют (BCHP);
b) расслоение путей $C(I, Y) \to Y$ удовлетворяет (BCHP).

6. Докажите, что следующие отображения являются локально тривиальными расслоениями
a) $\mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$;
b) $S^n \to \mathbb{RP}^n$, $S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$, $S^{4n+3} \to \mathbb{HP}^n$;
c) $\mathrm{Fl}(k_1, \ldots, k_r; n) \to \mathrm{Fl}(k_{i_1}, \ldots, k_{i_s}; n)$, если $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_s \leqslant r$;
d) $O(n) \to S^{n-1}$, $U(n) \to S^{2n-1}$, $Sp(n) \to S^{4n-1}$;
e) $V(k, n) \to \mathrm{Gr}(k, n)$, $\mathbb{C}V(k, n) \to \mathbb{C}\mathrm{Gr}(k, n)$, $\mathbb{H}V(k, n) \to \mathbb{H}\mathrm{Gr}(k, n)$.

7. Докажите, что
a) композиция расслоений является расслоением;
b) если $p_1 : E_1 \to B_1$ и $p_2 : E_2 \to B_2$ — расслоения, то $p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2$ — расслоение;
c) если $p_1 : E_1 \to B_1$ и $p_2 : E_2 \to B_2$ — локально тривиальные расслоения, то $p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2$ — локально тривиальное расслоение;

8. Пусть $f : X \to B$ и $g : Y \to B$ — непрерывные отображения. Определим расслоенное произведение $X \times_B Y = \{\, (x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y) \,\}$ и проекции $p(x, y) = x$, $q(x, y) = y$. Докажите, что

$$\begin{tikzcd} X \times_B Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

a) g — тривиальное расслоение $\Longrightarrow p$ — тривиальное расслоение;
b) g — локально тривиальное расслоение $\Longrightarrow p$ — локально тривиальное расслоение;
c) $C(Z, X \times_B Y) = C(Z, X) \times_{C(Z,B)} C(Y, B)$;
d) g — расслоение $\Longrightarrow p$ — расслоение.

9. Докажите, что гомотопический тип гомотопического слоя отображения не зависит от выбора гомотопически эквивалентного ему расслоения.