Задачи по топологии к 24 сентября 2004 г.

1. Пусть $f : A \to X$ и $g : A \to Y$ — непрерывные отображения.
Определим копроизведение $X \sqcup_A Y := (X \sqcup Y)/(f(a) \sim g(a))$,
и отображения $i : X \to X \sqcup Y \to X \sqcup_A Y$, $j : Y \to X \sqcup Y \to X \sqcup_A Y$
(соответствующий квадрат называется кодекартовым).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "i"] & X \sqcup_A Y \end{tikzcd}$$

Докажите, что a) $\mathrm{Cyl}(f : X \to Y) = (X \times I) \sqcup_X Y$;
b) $C(X \sqcup_A Y, Z) = C(X, Z) \times_{C(A,Z)} C(Y, Z)$;
c) g — корасслоение $\Longrightarrow$ i — корасслоение.

2. Пусть $f : A \to X$ — непрерывное отображение. Докажите, что
a) $f : A \to X$ — корасслоение $\Longrightarrow$ $f \times \mathrm{Id}_Y : A \times Y \to X \times Y$ — корасслоение;
b) композиция корасслоений — корасслоение;
c) f — корасслоение $\Longleftrightarrow$ каноническое отображение $i : \mathrm{Cyl}(f) \to X \times I$ — ретрагируемо,
то есть $\exists r : X \times I \to \mathrm{Cyl}(f)$, так что $r \circ i = \mathrm{Id}_{\mathrm{Cyl}(f)}$.

3. Пусть $i : A \to X$ — корасслоение. Докажите, что
a) i инъективно;
b) если $i(A)$ замкнуто в X, то топология A — индуцированная (такая пара (X, A) называется парой Борсука).

4. Пусть $A \subset X$ — пара Борсука, $\widetilde{A} = \mathrm{Cyl}(A \to X)$, $i : \widetilde{A} \to X \times I$ — стандартное вложение и $r : X \times I \to \widetilde{A}$ — ретракция из задачи 2c). Положим $i(r(x,t)) = (\xi(x,t), \tau(x,t))$ и определим $\varphi(x) = \max_{t \in I}(t - \tau(x,t))$.
Докажите, что
a) $\varphi : X \to I$ — непрерывна и $\{\, x \in X \mid \varphi(x) = 0 \,\} = A$ (A — функционально выделяемо);
b) $\overline{H}(x,t,s) = (\xi(x,(1-s)t), (1-s)\tau(x,t) + st)$ — гомотопия $(X \times I) \times I \to (X \times I)$ из $i \circ r$ в $\mathrm{Id}_{X \times I}$;
c) утверждение теоремы о подъеме верно для корасслоения $\widetilde{A} \to X \times I$ (положите $H(x,t,s) = \overline{H}(x,t,s/\varphi(x))$ для $s \leqslant \varphi(x)$ и $(x,t) \notin \widetilde{A}$ и $H(x,t,s) = (x,t)$ иначе);
d) утверждение о продолжении накрывающей гомотопии верно для любой пары Борсука.

5. Докажите, что (X, A) — пара Борсука $\Longrightarrow$ отображение ограничения $C(X, Y) \to C(A, Y)$ — расслоение.

6. Пусть $p : E \to B$ — расслоение со слоем F. Докажите, что
a) B — стягиваемо $\Longrightarrow$ $i_* : \pi_n(F) \to \pi_n(E)$ — изоморфизм;
b) $\pi_0(B) = *$ и F — стягиваемо $\Longrightarrow$ $p_* : \pi_n(E) \to \pi_n(B)$ — изоморфизм;
c) E — стягиваемо $\Longrightarrow$ $\partial : \pi_{n+1}(B) \to \pi_n(F)$ — изоморфизм;
d) $\forall n\ |\pi_n(B)|, |\pi_n(F)| < \infty \Longrightarrow \forall n\ |\pi_n(E)| < \infty$.

7. Пользуясь расслоениями $S^\infty \to \mathbb{RP}^\infty$, $S^\infty \to \mathbb{CP}^\infty$ найдите гомотопические группы пространств
a) $\mathbb{RP}^\infty$; b) $\mathbb{CP}^\infty$.

8. Пусть $p : E \to B$ — расслоение со слоем F. Докажите, что
a) $\exists s : B \to E$ такое что $p \circ s \sim \mathrm{Id}_B \Longrightarrow \pi_n(E) \cong \pi_n(B) \times \pi_n(F)$;
b) $\exists r : E \to F$ такое что $r \circ i \sim \mathrm{Id}_F \Longrightarrow \pi_n(E) \cong \pi_n(B) \times \pi_n(F)$;
c) F стягивается в $E \Longrightarrow \pi_n(F) \cong \pi_{n+1}(B)/\pi_{n+1}(E)$.

9. Докажите, что $\pi_n(X \times Y) \cong \pi_n(X) \times \pi_n(Y)$.