Задачи по топологии к 1 октября 2004 г.

1. Докажите, что
a) плоскость накрывает тор;
b) тор накрывает бутылку Клейна;
c) сфера с $g \geqslant 2$ ручками накрывает сферу с 2 ручками;
d) букет из $n \geqslant 2$ окружностей накрывает букет из двух окружностей.

2. Придумайте универсальное накрытие букета из n окружностей и докажите, что его фундаментальная группа есть свободная группа с n образующими, а высшие гомотопические группы тривиальны.

3. Пусть X — классическая поверхность с дыркой. Докажите, что
a) X гомотопически эквивалентна букету окружностей (Указание: склейте X из многоугольника с дыркой);
b) $\pi_n(X) = 0$ при $n \geqslant 2$.

4. Пусть X — классическая поверхность, а Y получена приклеванием к X ручки. Пусть Y_k — объединение k поверхностей X, приклеенных трубками к цилиндру длины k.
a) Постройте накрытие $Y_\infty \to Y$. (Указание: намотайте цилиндр на тор.)
b) Покажите, что всякий сфероид в Y_∞ содержится в Y_k.
c) Докажите, что $\pi_n(Y) = 0$ при $n \geqslant 2$.

5. Докажите, что если X — классическая поверхность, то при $n \geqslant 2$

$$\pi_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } X = S^2 \text{ или } X = \mathbb{RP}^2; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

6. Докажите, что
a) если $p : T \to B$, то отображение $f : (Z, z_0) \to (B, b_0)$ поднимается до отображения $\tilde{f} : (Z, z_0) \to (T, t_0)$, такого что $p \circ \tilde{f} = f$, тогда и только тогда, когда $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(T, t_0))$;
b) если Z связно, то такое поднятие единственно.

7. Докажите, что
a) двулистное накрытие всегда является накрытием Галуа;
b) придумайте пример нерегулярного трехлистного накрытия.

8. Докажите, что $\pi_1(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

9. Докажите, что a) $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$; b) $\pi_4(S^3)$ — факторгруппа группы $\mathbb{Z}$.