Задачи по топологии к 8 октября 2004 г.

1. Комплекс $C^\bullet$ называется ацикличным или точной последовательностью, если $H^i(C^\bullet) = 0$ при всех i. Докажите, что

a) Комплекс $0 \to A \to 0$ точен $\iff A = 0$.

b) Комплекс $0 \to A \xrightarrow{f} B \to 0$ точен $\iff f$ — изоморфизм.

c) Комплекс $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ точен $\iff f$ — мономорфизм, g — эпиморфизм и $C = B/A$. Такие точные последовательности называбтся точными тройками или короткими точными последовательностями.

2. Докажите, что

a) гомотопия — отношение эквивалентности на множестве морфизмов двух комплексов;

b) если комплекс $C^\bullet$ стягиваем (то есть $\mathrm{Id}_{C^\bullet} \sim 0$), то он ацикличен;

c) множество эндоморфизмов комплекса, гомотопных нулю — идеал в кольце эндоморфизов комплекса.

3. Докажите, что ацикличный комплекс составленный из свободных абелевых групп (векторных пространств) стягиваем (то есть его тождественное отображение в себя гомотопно нулевому).

4. Пусть (C, ∂) — гомологический комплекс абелевых групп. Определим когомологический комплекс C^* формулами $(C^*)^n = \mathrm{Hom}(C_n, \mathbb{Z})$, $(\delta^n c)(a) = c(\partial_{n+1} a)$.

a) Продолжите это сопоставление до функтора (функтор дуализации).

b) Докажите, что функтор дуализации переводит гомотопные морфизмы комплексов в гомотопные.

c) Докажите, что если C стягиваем, то и C^* стягиваем.

d) Докажите, что если C ацикличен и свободен, то и C^* ацикличен и свободен.

e) Приведите пример ацикличного комплекса C, такого что C^* не ацикличен.

5. Пусть $A \to B \to C \to 0$ — точная последовательность абелевых групп. Докажите, что последовательность $0 \to \mathrm{Hom}(C, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(B, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z})$ — точна.

6. Гомологии $H_n^{\mathrm{sing}}(X) = \mathrm{Ker}\, \partial_n / \mathrm{Im}\, \partial_{n+1}$ комплекса $(C_n(X), \partial_n)$ называются сингулярными гомологиями пространства X. Докажите, что

a) сопоставление $X \mapsto H_n^{\mathrm{sing}}(X)$, $(X \xrightarrow{f} Y) \mapsto (H_n^{\mathrm{sing}}(X) \xrightarrow{f_*} H_n^{\mathrm{sing}}(Y))$ — ковариантный функтор;

b) если $f \sim g$, то $f_* = g_*$;

c) $H_n^{\mathrm{sing}}(*) = 0$ при $n \neq 0$ и $H_0^{\mathrm{sing}}(*) = \mathbb{Z}$;

d) если $f : X \to Y$ — гомотопическая эквивалентность, то $f_* : H_n^{\mathrm{sing}}(X) \to H_n^{\mathrm{sing}}(Y)$ — изоморфизм;

e) если X — стягиваемо, то $H_n^{\mathrm{sing}}(X) = 0$ при $n \neq 0$ и $H_0^{\mathrm{sing}}(X) = \mathbb{Z}$;

f) $H_n^{\mathrm{sing}}(\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha) = \oplus_{\alpha \in A} H_n^{\mathrm{sing}}(X_\alpha)$;

g) если X линейно связно, то $H_0^{\mathrm{sing}}(X) \cong \mathbb{Z}$;

h) $H^0_{\mathrm{sing}}(X) = \oplus \mathbb{Z}$ — сумма по компонентам линейной связности.

7. Пусть $f : X \to *$ — проекция. Докажите, что если X непусто, то $f_* : H_n^{\mathrm{sing}}(X) \to H_n^{\mathrm{sing}}(*) = \mathbb{Z}$ — сюръекция. Ее ядро называется приведенными сингулярными гомологиями $\widetilde{H}_n^{\mathrm{sing}}(X) = \mathrm{Ker}\, f_*$.

8. Докажите, что если X непусто, то

a) $H_n^{\mathrm{sing}}(X) \cong \widetilde{H}_n^{\mathrm{sing}}(X) \oplus H_n^{\mathrm{sing}}(*)$;

b) $H^n_{\mathrm{sing}}(X) \cong \widetilde{H}^n_{\mathrm{sing}}(X) \oplus H^n_{\mathrm{sing}}(*)$;

c) разложения в прямую сумму зависят от выбора компоненты линейной связности в X.