Задачи по топологии к 15 октября 2004 г.

1. Пусть

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E_1^\bullet & \longrightarrow & E_2^\bullet & \longrightarrow & E_3^\bullet & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1^\bullet} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_2^\bullet} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_3^\bullet} & & \\ 0 & \longrightarrow & F_1^\bullet & \longrightarrow & F_2^\bullet & \longrightarrow & F_3^\bullet & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

морфизм точных троек комплексов. Докажите коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^n(E_1^\bullet) & \longrightarrow & H^n(E_2^\bullet) & \longrightarrow & H^n(E_3^\bullet) & \longrightarrow & H^{n+1}(E_1^\bullet) & \longrightarrow & H^{n+1}(E_2^\bullet) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1^*} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_2^*} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_3^*} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1^*} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_2^*} & & \\ \cdots & \longrightarrow & H^n(F_1^\bullet) & \longrightarrow & H^n(F_2^\bullet) & \longrightarrow & H^n(F_3^\bullet) & \longrightarrow & H^{n+1}(F_1^\bullet) & \longrightarrow & H^{n+1}(F_2^\bullet) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

2. (Конус морфизма комплексов.) Пусть $f : K^\bullet \to L^\bullet$ — морфизм комплексов. Докажите, что
a) $Con(f)^i = L^i \oplus K^{i+1}$, $d^i_{Con(f)}(l^i, k^{i+1}) = (d^i_L(l_i) + f^{i+1}(k^{i+1}), -d^{i+1}_K(k^{i+1}))$ — комплекс;
b) отображение $\pi : L^\bullet \to Con(f)^\bullet$, $l^i \mapsto (l^i, 0)$ — морфизм комплексов;
c) отображение $\delta : Con(f)^\bullet \to K^{\bullet+1}$, $(l^i, k^{i+1}) \mapsto k^{i+1}$ — морфизм комплексов;
d) последовательность $\cdots \to H^n(K^\bullet) \xrightarrow{f} H^n(L^\bullet) \xrightarrow{\pi} H^n(Con(f)^\bullet) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(K^\bullet) \xrightarrow{f} H^{n+1}(L^\bullet) \to \dots$ точна.

3. Пусть $f : K^\bullet \to L^\bullet$ — морфизм ограниченных комплексов свободных абелевых групп, индуцирующий изоморфизм их когомологий. Докажите, что
a) $Con(f)$ — ограниченный ацикличный комплекс свободных абелевых групп;
b) $Con(f)$ — стягиваем;
c) f — гомотопическая эквивалентность.

4. Докажите для сингулярных гомологий
a) существование последовательности Майера–Виеториса;
b) существование точной последовательности корасслоения.

5. Вычислите a) $H_n(S^m)$; b) $H_n(X \cup_{S^m} D^{m+1})$.

6. Докажите, что a) $\widetilde{H}^\bullet(\vee_{\alpha\in A} X_\alpha) = \prod_{\alpha\in A} \widetilde{H}^\bullet(X_\alpha)$; b) $\widetilde{H}_\bullet(\vee_{\alpha\in A} X_\alpha) = \oplus_{\alpha\in A} \widetilde{H}_\bullet(X_\alpha)$.
(Указание: $\vee_{\alpha\in A} X_\alpha = (\sqcup_{\alpha\in A} X_\alpha)/A$.)