Задачи по топологии к 22 октября 2004 г.

1. Пусть X — клеточное пространство, а Y — любое пространство. Докажите, что
a) каждая точка X принадлежит конечному подпространству X;
b) любое компактное подмножество в X лежит в конечном подпространстве в X;
c) X локально компактно тогда и только тогда, когда оно локально конечно;
d) отображение $X \to Y$ непрерывно $\iff$ оно непрерывно на любом конечном подпространстве в X;
e) отображение $X \to Y$ непрерывно $\iff$ оно непрерывно на любом остове X.

2. Докажите, что
a) фактор клеточного пространства по клеточному подпространству — клеточное пространство;
b) цилиндр, конус и надстройка над клеточным пространством — клеточные пространства;
c) если X, Y — клеточные пространства, $A \subset Y$ — клеточное подпространство и $\varphi : A \to X$ — клеточное отображение, то $X \cup_\varphi Y$ — клеточное пространство;
d) цилиндр и конус клеточного отображения — клеточные пространства;
e) букет клеточных пространств — клеточное пространство.

3. Пусть X и Y — клеточные пространства. Определим на $X \times Y$ топологию аксиомой (W). Обозначим получившееся топологическое пространство через $X \times_w Y$. Докажите, что
a) тавтологическое отображение $X \times_w Y \to X \times Y$ всегда непрерывно;
b) если X или Y локально конечны, то $X \times_w Y \cong X \times Y$;
c) если X и Y локально счетны, то $X \times_w Y \cong X \times Y$.

4. Придумайте клеточные разбиения a) сферы S^∞; b) шара D^∞.

5. Рассмотрим вложение $\mathbb{RP}^k \subset \mathbb{RP}^n$, $(x_0, \dots, x_k) \mapsto (x_0, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$.
a) Докажите, что $\mathbb{RP}^n = \cup_{k=0}^n (\mathbb{RP}^k \setminus \mathbb{RP}^{k-1})$ — клеточное разбиение.
b) Придумайте аналогичные клеточные разбиения пространств $\mathbb{CP}^n$ и $\mathbb{HP}^n$.

6. (Клетки Шуберта.) Пусть $k \geqslant \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \dots \geqslant \alpha_{n-k} \geqslant 0$ — набор целых чисел. Определим $e_\alpha \subset \mathrm{Gr}(k, n)$ как $e_\alpha = \{\, U \subset \mathbb{R}^n \mid \dim U \cap \mathbb{R}^m = m - j$ при всех $k - \alpha_j + j \leqslant m < k - \alpha_{j+1} + (j+1) \,\}$ (мы полагаем $\alpha_0 = k$, $\alpha_{n-k+1} = 0$ и рассматриваем вложение $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $(x_0, \dots, x_m) \mapsto (x_0, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$. Докажите, что
a) $e_\alpha \cong \mathbb{R}^{\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-k}}$ (указание: приведите матрицу, задающую вложение $U \to \mathbb{R}^n$ к ступенчатому виду);
b) $\mathrm{Gr}(k, n) = \bigcup e_\alpha$ — клеточное разбиение.
c) Придумайте аналогичные клеточные разбиения пространств $\mathbb{C}\mathrm{Gr}(k, n)$ и $\mathbb{H}\mathrm{Gr}(k, n)$.

7. Пусть $\tau \in \mathfrak{S}_n$ — перестановка. Пусть $e_\tau = \{\, U_1 \subset \dots \subset U_{n-1} \subset \mathbb{R}^n \mid \dim(U_i \cap \mathbb{R}^j) = |\{\, p \leqslant i \mid \tau_p \leqslant j \,\}| \,\} \subset \mathrm{Fl}(1, 2, \dots, n-1; n)$. Докажите, что
a) $e_\tau \cong \mathbb{R}^{|\{\, (1 \leqslant i < j \leqslant n \mid \tau_i > \tau_j \,\}|}$;
b) $\mathrm{Fl}(1, \dots, n-1; n) = \bigcup e_\tau$ — клеточное разбиение.
c) Придумайте аналогичные клеточные разбиения пространств $\mathbb{C}\mathrm{Fl}(1, \dots, n-1; n)$ и $\mathbb{H}\mathrm{Fl}(1, \dots, n-1; n)$.

8. Докажите, что
a) поверхность склеенная из многоугольника обладает клеточным разбиением;
b) сфера с g ручками обладает клеточным разбиением с $2g$ одномерными клетками;
c) проективная плоскость с g ручками обладает клеточным разбиением с $2g + 1$ одномерной клеткой;
d) бутылка Клейна с g ручками обладает клеточным разбиением с $2g + 2$ одномерными клетками.

9. Докажите, что

a) $H^n(\mathbb{CP}^m) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } n \text{ четно и } n \leqslant 2m \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ b) $H^n(\mathbb{HP}^m) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } n \text{ делится на 4 и } n \leqslant 4m \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

10. Вычислите когомологии a) $\mathbb{RP}^m$; b) грассманианов; c) флагов; в) классических поверхностей.

11. Докажите, что a) $\chi(X \sqcup Y) = \chi(X) + \chi(Y)$; b) $\chi(X/A) = \chi(X) - \chi(A) + 1$; c) $\chi(X \vee Y) = \chi(X) + \chi(Y) - 1$; d) $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$; e) $\chi(\Sigma X) = -\chi(X)$; f) $\chi(X \# Y) - 1 = (\chi(X) - 1)(\chi(Y) - 1)$.

12. Объясните, как вычислять гомологии клеточных пространств.

13. Пусть $n \geqslant m$. Постройте $\cap$-умножение $H^m(X) \times H_n(X) \to H_{n-m}(X)$ и покажите, что оно задает действие когомологий на гомологиях.