Задачи по топологии к 29 октября 2004 г.

1. Вычислите
a) $H^n(S^m,G)$ и $H_n(S^m,G)$ для всех n, m и G;
b) $H^n(\mathbb{CP}^\infty,G)$ и $H_n(\mathbb{CP}^\infty,G)$ для всех n и G;
c) $H^n(\mathbb{RP}^m,\mathbb{Z}_2)$ и $H_n(\mathbb{RP}^m,\mathbb{Z}_2)$ для всех n и m.

2. Пусть X получено из $\vee_{\alpha\in A}S^n$ приклеиванием $(n+1)$-мерных клеток. Покажите, что $H_m(X)=0$ при $m<n$ и $H_n(X)$ есть факторгруппа группы $\oplus_{\alpha\in A}\mathbb{Z}$ по подгруппе, порожденной элементами $(\chi_{\beta|S^n})_*(1)$, где $\chi_\beta : D^{n+1}\to X$ — характеристическое отображение клетки e_β^{n+1}.

3. Дайте аксиоматическое описание теории гомологий (когомологий) с коэффициентами в группе G.

4. Покажите, что если R — кольцо, то $H^\bullet(X,R)$ — R-алгебра.

5. Покажите, что если $0\to G_1\to G_2\to G_3\to 0$ — точная последовательность абелевых групп то возникают точные последовательности
a) $\dots\to H_n(X,G_1)\to H_n(X,G_2)\to H_n(X,G_3)\to H_{n-1}(X,G_1)\to\dots$;
b) $\dots\to H^n(X,G_1)\to H^n(X,G_2)\to H^n(X,G_3)\to H^{n+1}(X,G_1)\to\dots$.

6. Докажите функториальность по обоим аргументам функторов a) Tor_1; b) Ext^1.

7. Докажите, что $\mathrm{Tor}_1(A,B)=\mathrm{Tor}_1(B,A)$.

8. Вычислите a) $\mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n)$; b) $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n)$; c) $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z})$.

9. Докажите, что если $\mathsf{k}=\mathbb{Q}$, $\mathsf{k}=\mathbb{R}$ или $\mathsf{k}=\mathbb{C}$, то a) $\mathrm{Tor}_1(A,\mathsf{k})=0$; b) $\mathrm{Ext}^1(A,\mathsf{k})=0$.

10. Докажите, что
a) $H^n(X,G)\cong H^n(X)\otimes G\oplus\mathrm{Tor}_1(H^{n+1}(X),G)$;
b) $H_n(X,G)\cong\mathrm{Hom}(H^n(X),G)\oplus\mathrm{Ext}^1(H^{n+1}(X),G)$.
c) Постройте соответствующие канонические точные тройки.

11. Покажите, что если k — поле, то
a) $H_n(X,\mathsf{k})$ и $H^n(X,\mathsf{k})$ — векторные пространства над k;
b) $H^n(X,\mathsf{k})\cong\mathrm{Hom}_{\mathsf{k}}(H_n(X,\mathsf{k}),\mathsf{k})$;
c) $H_n(X\times X',\mathsf{k})=\oplus_{p+q=n}H_p(X,\mathsf{k})\otimes_{\mathsf{k}}H_q(X,\mathsf{k})$;
d) $H^n(X\times X',\mathsf{k})=\oplus_{p+q=n}H^p(X,\mathsf{k})\otimes_{\mathsf{k}}H^q(X,\mathsf{k})$.

12. Пусть $\Delta : X\to X\times X$ — диагональное вложение ($\Delta(x)=(x,x)$). Докажите, что композиция вложения $H^p(X)\otimes H^q(X)\to H^{p+q}(X\times X)$ и отображения $\Delta^* : H^{p+q}(X\times X)\to H^{p+q}(X)$ совпадает с $\cup$-произведением.

13. Докажите, что
a) $H^\bullet(\mathbb{CP}^n)=\mathbb{Z}[h]/h^{n+1}\mathbb{Z}[h]$, $\deg h=2$;
b) $H^\bullet(\mathbb{CP}^\infty)=\mathbb{Z}[h]$, $\deg h=2$;
c) $H^\bullet(S^1\times\dots\times S^1,\mathsf{k})=\Lambda^\bullet_{\mathsf{k}}(\xi_1,\dots,\xi_n)$ — внешняя алгебра от n образующих над полем k;