Элементы комбинаторики.

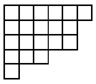
A1◇1. Сколько разных слов (не обязательно осмысленных) можно получить переставляя буквы в словах **а)** шнурок; **б)** курок; **в)** колобок; **г)** $\underbrace{\text{аа}\ldots\text{а}}_{a}\underbrace{\text{бб}\ldots\text{б}}_{b}$;

д) $\underbrace{\text{б}_1\text{б}_1\ldots\text{б}_1}_{k_1}\underbrace{\text{б}_2\text{б}_2\ldots\text{б}_2}_{k_2}\ldots\ldots\ldots\underbrace{\text{б}_m\text{б}_m\ldots\text{б}_m}_{k_m}$;.

A1◇2. Раскройте скобки и прведите подобные слагаемые в выражениях
а) $(a_1+a_2+\cdots+a_m)^2$; **б)** $(a+b+c)^3$; **в)** $(a+b)^n$; **г)** $(a_1+a_2+\cdots+a_m)^n$.

A1◇3. Имеются: 4 попарно отличающихся друг от друга чашки, 4 совершенно одинаковых гранёных стакана, 10 совершенно одинаковых кусков сахара и 7 попарно разноцветных соломинок. Сколькими способами можно разложить: **а)** соломинки по чашкам
б) сахар по чашкам **в)** сахар по стаканам **г)** соломинки по стаканам

A1◇4. Как изменятся ответы в предыдущей задаче, если потребовать, чтобы после раскладывания пустых ёмкостей не оставалось?

A1◇5. Фигурка типа  (состоящая из выравненных по левому краю клетчатых горизонтальных полосок, длина которых невозрастает сверху вниз) называется *диаграммой Юнга*. Общее число клеток в диаграмме называется её *весом*. Сколько существует диаграмм Юнга
а) веса 6; **б)** веса 7, имеющих не более 3 строк;
в) произвольного веса, но имеющих не более p строк и не более q столбцов.

Мультиномиальные коэффициенты. Пусть $n = n_1+n_2+\cdots+n_\nu$ (все n_i — целые неотрицательные). Числа

$$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\,\cdots\,\cdot n_\nu!}$$

называются *мультиномиальными коэффициентами*. При $\nu=2$ *биномиальный коэффициент* $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ обычно обозначается через $\binom{n}{k}$ и (в некоторых кругах) называется *числом сочетаний* из n по k. По определению, $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$ при всех $n\geqslant 0$.

A1◇6. Цело ли число $\dfrac{1000!}{100!^{10}}$?

A1◇7. Фиксируем $m,n\in\mathbb{N}$. Сколько решений имеет уравнение $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$
а) в натуральных **б)** в целых неотрицательных числах?

A1◇8. Сколько имеется различных одночленов степени **а)** d **б)** $\leqslant d$ от n переменных?

A1◇9. Фиксируем конечные упорядоченные множества M и N, состоящие, соответственно, из m и из n элементов. Сколько имеется разных отображений $M\to N$: **а)** произвольных
б) инъективных **в)** строго возрастающих **г)** взаимно однозначных **д)** неубывающих

A1◇10. Вычислите: **а)** $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}$; **б)** $\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\cdots+\binom{k+n}{k}$;

в*) $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2$.

A1◇11. Верно ли, что для простого p коэффициент $\binom{p}{k}$ либо равно 1 либо делится на p?