Примеры векторных пространств

A4◇1 (пространства многочленов). Найдите размерность пространства
а) многочленов степени $\leqslant n$ от m переменных;
б) однородных многочленов степени d от m переменных;
в) однородных симметрических многочленов степени 10 от 4 переменных;
г) симметрических многочленов степени $\leqslant 3$ от 4 переменных.

A4◇2. Пусть k — поле. Векторное подпространство $V \subset k[t]$ содержит многочлен каждой из степеней $d = 0, 1, \dots, m$. Содержит ли оно *все* многочлены степени $\leqslant m$?

A4◇3 (интерполяционная формула Лагранжа). Дано $m+1$ попарно разных чисел $a_i \in k$. Постройте $m+1$ многочленов $f_i \in k[t]$ степени $\leqslant m$, так чтобы $f_i(a_j) = \delta_{ij}$. Составят ли f_i базис в подпространстве $V_m \subset k[t]$ всех многочленов степени $\leqslant m$? Сколько всего может быть в V_m многочленов, принимающих заданные значения b_i в a_i? Приведите явный пример такого многочлена.

A4◇4 (интерполяция с кратными узлами). Дано n попарно разных точек $a_i \in k$, для каждой из них задано m_i чисел $b_i^{(0)}, b_i^{(1)}, \dots, b_i^{(m_i-1)}$, так что всего этих чисел $\sum m_i = m+1$. Сколько имеется многочленов f степени $\leqslant m$, таких что f и его первые $m_i - 1$ производных $f^{(j)}$ принимают предписанные значения $b_i^{(j)}$ в каждой точке a_i?

A4◇5. Какова размерность пространства многочленов $f \in \mathbb{R}[x]$ степени $\leqslant n$, обращающихся в нуль в точке $(3-2i) \in \mathbb{C}$? А в прозвольно заданных k разных точках $z_\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$?

A4◇6 (пространство функций). Убедитесь, что множество V^M всех функций на данном множестве M со значениями в произвольном векторном пространстве V является векторным пространством (сложение функций и умножение их на константы определяется поточечно). Пусть M — конечное множество из n элементов и $V = k$ —основное поле; найдите размерность V^M и постройте в нем какй-нибудь базис.

A4◇7. Какие из перечисленных ниже наборов функций линейно независимы?
а) $\{1, \sin x, \cos x, \dots, \sin nx, \cos nx\}$ и $\{1, \sin x, sin^2 x, \cdots, \sin^m x\}$ на $[0, 2\pi]$;
б) $\{e^{\lambda_1 z}, \dots, e^{\lambda_m z}\}$ и $\{x^{\lambda_1}, \dots, x^{\lambda_m}\}$ на $\mathbb{R}$ ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ — разные числа);
в) $\{x, x^2, \dots, x^{p+1}\}$ и $\{x^p, x^{p^2}, \cdots, x^{p^p}\}$ на $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

A4◇8 (пространство подмножеств). Составляет ли множество всех подмножеств данного множества M векторное пространство над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ относительно операций $X + Y \stackrel{\text{def}}{=} (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$, $1 \cdot X \stackrel{\text{def}}{=} X$, и $0 \cdot X \stackrel{\text{def}}{=} \varnothing$? Если да, то постройте в нём базис и найдите его размерность (для конечного M). Будет ли семейство подмножеств $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ линейно независимо, если **а)** $X_i \not\subset \bigcup\limits_{\nu \neq i} X_\nu$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$; **б)** $X_1 \not\subset X_2 \not\subset \cdots \not\subset X_n$.

A4◇9 (пространство чисел). Рассмотрим $\mathbb{R}$ как векторное пространство над $\mathbb{Q}$. Конечна ли его размерность? Будут ли линейно независимы над $\mathbb{Q}$ векторы: **а)** $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{7}$? **б*)** $p_1^{m_1/n_1}, \dots, p_s^{m_s/n_s}$, где $p_i, n_i, m_i \in \mathbb{N}$, p_i различны и просты, и $\text{нод}(n_i, m_i) = 1 \ \forall\, i$?

A4◇10 (конечные пространства). Пусть V — d-мерное векторное пространство над конечным полем из q элементов. Сколько всего в V разных: **а)** векторов; **б)** базисов; **в)** набов из k линейно независимых векторов; **г)** k-мерных подпространств?

A4◇11. Всегда ли число элементов конечного является степенью его характеристики?

A4◇12. Пусть $k \subset K$ — два поля, и K — конечномерно как векторное простанство над k. Любой ли элемент поля K является корнем некоторого многочлена из $k[x]$?

A4◇13. Пусть $f \in k[x]$ неприводим, $\deg f = n$, $\alpha \in K$ — корень f в некотором расширении $K \supset k$, и $k(\alpha) \subset K$ – наименьшее подполе, содержащее k и α. Найдите $\dim_k k(\alpha)$.