Грассмановы многочлены и определители

A5◇1. Верно ли, набор функций $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ на произвольном множестве M со значениями в некотором поле k тогда и только тогда линейно независим, когда найдётся n точек $t_1, t_2, \dots, t_n \in M$ таких, что $\det(f_i(t_j)) \neq 0$?

A5◇2. Найдите знаки перестановок $(n,\,(n-1),\,\dots\,,\,2,\,1)$ и $(\,i_1, i_2, \dots, i_m\,,\;j_1, j_2, \dots, j_{n-m}\,)$, где $i_1, i_2, \dots, i_m$ и $j_1, j_2, \dots, j_{n-m}$ — возрастающие дополнительные подмножества.

A5◇3. Числа 1, 2, 3, … , n^2 всевозможными способами организуются в квадратные матрицы размера $n \times n$. Найдите сумму определителей всех этих матриц.

A5◇4. Вычислите: **а)** $\det\left(\alpha_i\beta_j\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$; **б)** $\det\left(\cos(\alpha_i-\beta_j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$; **в)** $\det\left(1-\delta_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$; **г)** $\det\left(\alpha_j^i\right)_{0\leqslant i\leqslant (n-1)\,,\,1\leqslant j\leqslant n}$; **д*)** $\det\left((i+j-1)^{-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$; **е*)** $\det\left(\alpha^{j-i-1\ (\mathrm{mod}\ n)}\right)_{0\leqslant i\leqslant (n-1)\,,\,1\leqslant j\leqslant n}$.

A5◇5* (циркулянт). Выразите определитель матрицы, строки которой являются последовательными циклическими перестановками строки $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, через значения полинома $f(x) = \alpha_0x^n + \alpha_1x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}x + \alpha_n$ на корнях $(n+1)$-ой степени из единицы.

A5◇6 (соотношения Сильвестра). Зафиксируем какой-нибудь порядок на множестве всех $\binom{n}{k}$ возрастающих k-элементных подмножеств $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ и построим по произвольной квадратной $n\times n$-матрице A квадратную матрицу A_k размера $\binom{n}{k}\times\binom{n}{k}$, элементы которой a_{IJ} суть $k\times k$-миноры A, сосредоточенные в строках $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ и столбцах $J = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$. Одновременно образуем ещё одну $\binom{n}{k}\times\binom{n}{k}$-матрицу $\widehat{A}_k$, в IJ-той клетке которой стоит дополнительный к a_{IJ} минор $a_{\widehat{I}\widehat{J}}$ порядка $(n-k)\times(n-k)$, умноженный на $(-1)^{\sum i_\nu + \sum j_\nu}$. Покажите, что $A_k \cdot \widehat{A}_k^t = \widehat{A}_k^t \cdot A_k = \det(A)\cdot E$.

A5◇7. Вычислите все частные производные $\frac{\partial^k \det(A)}{\partial a_{i_1j_1}\partial a_{i_2j_2}\dots\partial a_{i_kj_k}}$.

A5◇8. Чему равен коэффициент при x^ky^{n-k} в разложении $\det(xA + yB)$, где A, B суть $n\times n$-матрицы, а x, y — скалярные переменные.

A5◇9. При каких условиях целочисленная матрица обратима над $\mathbb{Z}$?

A5◇10. Опишите центр грассмановой алгебры, т. е. совокупность всех грассмановых многочленов, коммутирующих с любыми элементами грассмановой алгебры.

A5◇11. Покажите, что любой грассманов однородный многочлен степени 2 над произвольным полем, в котором $1+1\neq 0$, линейной обратимой заменой координат приводится к виду $\xi_1\wedge\xi_2+\xi_3\wedge\xi_4+\cdots$ (в частности, он всегда эффективно зависит от чётного числа переменных).

A5◇12. Покажите, что однородный грассманов квадратичный многочлен ω от четырёх переменных тогда и только тогда является произведением двух линейных форм, когда $\omega\wedge\omega = 0$.

A5◇13 (соотношение Плюккера). Обозначим через A_{ij} 2×2-минор, стоящий в i-том и j-том столбцах заданной 2×4-матрицы A. Покажите, что 6 величин A_{ij} связаны квадратичным соотношением. Существует ли 2×4-матрица с 2×2 минорами:

а) $\{\,2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\,\}$? **б)** $\{\,3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\,\}$?

A5◇14 (грассманова экспонента). Для каждого однородного грассманова многочлена ω чётной степени, полностью разложимого в произведение линейных множителей, мы полагаем $e^\omega \overset{\text{def}}{=} 1+\omega$ и распространяем это определение на линейные комбинации таких многочленов по правилу $e^{\sum\omega_i} = \prod e^{\omega_i}$ с целью получить отображение $\Lambda^{\text{even}} \xrightarrow{f\mapsto e^f} \Lambda$. Верно ли, что

а) такое определение e^f для произвольного $f\in\Lambda^{\text{even}}$ не зависит ни от разложения f в сумму $f = \sum\omega_i$, ни от порядка сомножителей в $\prod e^{\omega_i}$?

б) наше отображение инъективно и переводит суммы в произведения?

в) над полем характеристики нуль $e^f = \sum\limits_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}\overbrace{f\wedge f\wedge\dots\wedge f}^{k}$?