Матричная алгебра

А6◇1°. На какую матрицу и с какой стороны надо умножить прямоугольную матрицу, чтобы
а) её i-тая и j-тая строки поменялись местами; **б)** её i-тая строка умножилась на λ;
в) к её i-той строке прибавилась j-тая, умноженная на λ; **г)** то же, но со столбцами.

Обозначения. В алгебре квадратных матриц $\mathrm{Mat}_n(k)$ ненулевая матрица A называется *нильпотентной*, если $A^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, и *унипотентной* — если $A = E + N$, где N нильпотентна. Матрица $[A,B] = AB - BA$ называтся *коммутатором* миатриц A и B. Число $\operatorname{tr} A = \sum a_{ii}$ называется *следом* A. Многочлен $\chi_A(x) = \det(xE - A) \in k[x]$ называется *характеристическим многочленом* матрицы A. Для $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \in k[x]$ мы полагаем $f(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_nE$ и обозначаем через $k[A]$ множество всех матриц вида $f(A)$ с всевозможными $f \in k[x]$.

А6◇2°. Вычислите $\operatorname{tr}[A,B]$ для произвольных квадратных матриц A, B.

А6◇3. Найдите все матрицы, коммутирующие **а)** с $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ **б)** со всеми $n \times n$-матрицами.

А6◇4. Найдите все 2×2-матрицы с нулевым квадратом.

А6◇5. Укажите хоть одну матрицу $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z})$ удовлетворяющую уравнению $x^2 = 2$. Будет ли при этом полем: **а)** $\mathbb{Z}[A]$, **б)** $\mathbb{Q}[A]$.

А6◇6. Подберите $A \in M_2(\mathbb{R})$ так, чтобы $\mathbb{R}[A] \simeq \mathbb{C}$. Из каких матриц состоит это поле?

А6◇7. На побочной диагонали $n \times n$-матрицы A стоят числа $\cos(2\pi/a_k) + i\,\sin(2\pi/a_k)$ с некими $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, в остальных местах — нули. Найдите наименьшее m, такое что $A^m = E$.

А6◇8. Выполняются ли для любых квадратных матриц A, B, C следующие *правила Лейбница*:
а) $[A, BC] = [A,B]C + B[A,C]$, **б)** $[A,[B,C]] = [[A,B],C] + [B,[A,C]]$.

А6◇9. Выразите $(A+B)^n$ через A^iB^j, если **а)** $[A,B] = 0$; **б*)** $[A,B] = B$; **в*)** $[A,B] = A$.

А6◇10. Нильпотентна ли сумма двух нильпотентных матриц A и B? Докажите, что это так, если **а)** $[A,B] = 0$; **б*)** $[A,[A,B]] = [B,[B,A]] = 0$.

А6◇11. Означает ли унипотентность матрицы A существование такого $n \in \mathbb{N}$, что $A^n = E$, над полем **а)** нулевой **б)** конечной характеристики ?

А6◇12. Обратимы ли матрицы $E \pm A$, если A — нильпотентна?

А6◇13. Для ненулевого $a \in \mathbb{C}$ вычислите: **а)** $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ **б)** $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{-1}$ **в)** $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{-1}$.

А6◇14. Напишите явную формулу для (ij)-того элемента матрицы, обратной к верхнетреугольной матрице (h_{ij}) с единицами по главной диагонали[1].

А6◇15. Выразите коэффициенты $\chi_A(t)$ через миноры матрицы A. Как они меняются при заменах $A \mapsto C^{-1}AC$?

А6◇16. Вычислите матрицу $\chi_A(A)$ для произвольной квадратной матрицы A.

А6◇17. Может ли $\dim_k k[A]$ превышать n?

А6◇18. Докажите, что подстановка фиксированной $n \times n$ матрицы A в степенные ряды задаёт гомоморфизм из подкольца $\mathbb{C}[[z]]$, состоящего из абсолютно сходящихся рядов, в кольцо $k[A]$, причём для любого абсолютно сходящегося ряда F существует многочлен[2] $f_{F,A}(z) \in \mathbb{C}[z]$ степени $\leqslant (n-1)$, такой что $f_{F,A}(A) = F(A)$.

А6◇19. Для каждой из матриц $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ вычислите: **а)** A^n **б)** $\sin A$ **в)** $\cos A$ **г)** e^A.

---

[1] найдите ответ, пригодный и для матриц с элементами из *некоммутативного* кольца

[2] подсказка: искомый многочлен $f_{F,A}(z)$ интерполирует $F(z)$ по значениям на корнях χ_A (с учётом их кратностей, как в зад. А4◇4) и обычно легко находится методом неопределённых коэффициентов