СИММЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Оглавление

1. Симметрические многочлены

1.1. **Определение и основные примеры.** Пусть R — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, n — натуральное число.

Определение 1. Многочлен $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ называется *симметрическим*, он не изменяется при любой перестановке переменных.

Очевидно, что единица, R-линейная комбинация и произведение симметрических многочленов являются симметрическим многочленов. Иными словами, множество симметрических многочленов является R-подалгеброй в $R[x]$. Мы будем обозначать эту подалгебру через $R[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$.

Приведем некоторые примеры симметрических многочленов:

Пример 2. *Элементарный симметрический многочлен* $e_d, 1 \leqslant d \leqslant n$, есть, по определению,

$$e_d(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_d} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_d}.$$

Пример 3. *Полный симметрический многочлен* h_d:

$$h_d(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j_1 \leqslant j_2 \leqslant \dots \leqslant j_d} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_d}.$$

Следующие конструкции связаны с диаграммами Юнга. Мы будем записывать их в виде $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, где λ_i — кол-во клеток в i-ой строке. Для диаграммы λ через λ' мы обозначаем сопряженную ей (т.е. "транспонированную" относительно главной диагонали). Чтобы не писать много одинаковых чисел при записи диаграммы Юнга мы будем ставить над числом k в записи диаграммы верхний индекс, обозначающий число раз, которое это число встречается. Скажем, запись $(3, 2^3, 1^2)$ обозначает диаграмму $(3, 2, 2, 2, 1, 1)$. Далее, если диаграмма Юнга λ состоит из не более чем n столбцов, то запись $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ с $m > n$ подразумевает, что $\lambda_{n+1} = \dots = \lambda_m$. Для диаграммы Юнга $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ мы полагаем $|\mu| = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ (кол-во клеток диаграммы). Наконец, нам потребуется частичный порядок на множестве диаграмм Юнга и n клеток. Именно, мы положим $\lambda \leqslant \mu$, если для любого $m \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $\sum_{i=1}^m \lambda_i = \sum_{i=1}^m \mu_i$. Если $\lambda \leqslant \mu$ и $\lambda \neq \mu$, мы пишем $\lambda < \mu$. Также будем употреблять (в понятном смысле) обозначения $\lambda \geqslant \mu, \lambda > \mu$. Можно также ввести полный порядок на множестве диаграмм Юнга: лексикографический. Именно, положим $\lambda \succ \mu$, если $\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_i = \mu_i, \lambda_{i+1} > \mu_{i+1}$. Понятно, что $\lambda > \mu \Rightarrow \lambda \succ \mu$, но не наоборот.

Пример 4. Пусть λ — диаграмма Юнга, состоящая из не более чем n строк. *Мономиальный симметрический многочлен* m_λ есть сумма всех мономов, полученных из $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$ перестановкой переменных, где каждый моном считается один раз.

К примеру, $e_d = m_\lambda$, где $\lambda = (1^d)$.

Частичное упорядочивание диаграмм Юнга дает частичное упорядочивание на множестве мономиальных симметрических многочленов.

Отметим, что любой симметрический многочлен однозначно восстанавливается по коэффициентам при мономах $x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}$ с $i_1 \geqslant i_2 \geqslant \dots \geqslant i_n$. Поэтому мономиальные симметрические многочлены образуют базис в R-модуле $R[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$. Таким образом, R-модуль симметрических многочленов степени m свободен и имеет ранг $p_n(m)$ (число диаграмм Юнга из m клеток, имеющих не более n строк).

Пример 5. Пусть $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_m)$ — диаграмма Юнга. Такой диаграмме мы сопоставим симметрические многочлены $h_\mu = h_{\mu_1}h_{\mu_2}\dots h_{\mu_m}$ и, если $\mu_1 \leqslant n$, $e_\mu = e_{\mu_1}e_{\mu_2}\dots e_{\mu_m}$.

Отметим, что степени e_μ, h_μ равны $|\mu|$.

Положим $\Delta = \prod_{i<j}(x_i - x_j) = \det(x_i^{n-j})_{i,j=\overline{1,n}}$ — определитель Ван дер Монда .

Определение 6. Пусть λ — диаграмма Юнга, состоящая не более чем из n строк. Многочленом Шура называется

$$s_\lambda = \det(x_i^{\lambda_j+n-j})_{i,j=\overline{1,n}}/\Delta. \tag{1.1}$$

Это действительно многочлен, ибо определитель $\det(x_i^{\lambda_j+n-j})$ обращается в 0 при $x_i = x_j$ и, стало быть, делится на $x_i - x_j$. Поскольку и числитель, и знаменатель, меняют знак при перестановке x_i и x_j, то s_λ — симметрический многочлен. Отметим, что $\deg s_\lambda = |\lambda|$. Это следует из сравнения степеней числителя и знаменателя.

Приведем примеры многочленов Шура.

Пример 7. $s_0 = 1$.

Пример 8. Рассмотрим диаграмму $\lambda = (1^d), d \leqslant n$ (у которой d строк длины 1). Покажем, что $s_\lambda = e_d$. Заметим, что

$$\sum_{d=0}^n t^d e_d = \prod_{i=1}^n (1 + t x_i).$$

Достаточно, таким образом, показать, что

$$\begin{aligned}
&\sum_{d=0}^n t^d \det\begin{pmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1^{n-d+1} & x_1^{n-d-1} & \dots & 1 \\ & & & \dots & & & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_1^{n-d+1} & x_n^{n-d-1} & \dots & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \det\begin{pmatrix} tx_1^n + x_1^{n-1} & tx_1^{n-1} + x_1^{n-2} & \dots & tx_1 + 1 \\ & & \dots & \\ tx_n^n + x_n^{n-1} & tx_n^{n-1} + x_1^{n-2} & \dots & tx_n + 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь остается разложить определитель в правой части, пользуясь полилинейностью определителя по столбцам. Отметим, что все слагаемые в правой части, кроме тех, которые содержатся в левой части, будут нулевыми из-за наличия двух одинаковых столбцов.

Пример 9. Рассмотрим диаграмму $\lambda = (d)$ (состоящую из одной строки). Оказывается, что $s_\lambda = h_d$ — полный симметрический многочлен. Заметим, что $\sum_{d=0}^\infty t^d h_d = \prod_{i=1}^n (1 - t x_i)^{-1}$. Таким образом, мы должны доказать, что

$$\sum_{d=0}^\infty t^d \det\begin{pmatrix} x_1^{d+n-1} & x_1^{n-1} & \dots & 1 \\ & \dots & & \\ x_n^{d+n-1} & x_n^{n-1} & \dots & 1 \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n (1 - t x_i)^{-1}\Delta. \tag{1.3}$$

Заметим, что, по свойству аддитивности определителя по столбцу, сумма определителей в левой части записывается в виде

$$\det\begin{pmatrix} x_1^{n-1}(1-tx_1)^{-1} & x_1^{n-2} & \dots & 1 \\ & \dots & & \\ x_n^{n-1}(1-tx_n)^{-1} & x_n^{n-2} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку ряд $(1-tx_1)\dots(1-tx_n)\in K[x_1,\dots,x_n][[t]]$ не является делителем нуля можем умножить на него обе части равенства (1.3). В правой части будет Δ, а в левой

$$\det\begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2}-tx_1^{n-1} & \dots & 1-tx_1 \\ & \dots & & \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2}-tx_n^{n-1} & \dots & 1-tx_n \end{pmatrix}.$$

Преобразовав этот определитель, прибавив ко второму столбцу первый умноженный на t, затем к третьему второй, умноженный на t и т.д., получим требуемое.

1.2. **Формулы Пьери.** Интересным и важным является вопрос о строении произведения многочленов Шура. Мы приведем первый из результатов по этому поводу.

Предложение 10. (1) *$s_\lambda h_d=\sum_\mu s_\mu$, где суммирование ведется по всем диаграммам Юнга μ, которые получаются из λ приписыванием d клеток, так чтобы никакие две из приписанных клеток не лежали в одном столбце.*

(2) *$s_\lambda e_d=\sum_\mu s_\mu$, где суммирование ведется по всем диаграммам Юнга μ, содержащим не более n строк, которые получаются из λ приписыванием d клеток, так чтобы никакие две из приписанных клеток не лежали в одной строке.*

Доказательство. (1). Пусть $i_1,\dots,i_n$ — произвольные неотрицательные числа. Имеем равенство степенных рядов

$$\det(x_i^{i_j})\sum_{d=0}^{\infty}h_d=\det(x_i^{i_j})\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{-1}=\sum_{(l_1,\dots,l_n)\in I}\det(x_i^{l_j}). \tag{1.4}$$

Здесь $I=\{(l_1,\dots,l_n)\in\mathbb{Z}^n | l_j\geqslant i_j, j=\overline{1,n}, l_j \text{ различны}\}$.

Действительно, надо умножить i-ую строку в определителе $\det(x_i^{i_j})$ на $(1-x_i)^{-1}$ и воспользоваться полилинейностью определителя. Правая часть является степенным рядом, ибо количество слагаемых каждой степени конечно.

Пусть теперь $i_j=\lambda_j+n-j$. Отсюда следует, что $i_1>i_2>\dots>i_n$. Нам достаточно показать, что правая часть равенства (1.4) равна

$$\sum\det(x_i^{n-j+\mu_j}), \tag{1.5}$$

где суммирование ведется по таким целым μ_j, что

$$\mu_1\geqslant\lambda_1\geqslant\mu_2\geqslant\lambda_2\geqslant\dots\geqslant\mu_n\geqslant\mu_n. \tag{1.6}$$

Это можно сказать и по другому. Именно, положим $I_1=\{(l_1,\dots,l_n)\in I | l_j<i_{j-1}, j=\overline{2,n}\}$, $I_2=I\setminus I_1$. Мы должны показать, что

$$\sum_{(l_1,\dots,l_n)\in I_2}\det(x_i^{l_j}). \tag{1.7}$$

Мы разобьем множество I_2 на пары так, чтобы сумма два определителя в правой части 1.7 получались друг из друга транспозицией столбцов. Это даст доказательство (1.7).

По определению $(l_1,\dots,l_n)\in I$ лежит в I_2, если найдется индекс j с $i_j\leqslant l_{j+1}$. Предположим, что j — минимальный такой индекс. Пусть $(l_1',\dots,l_n')$ — такой набор, что $l_i'=l_i, i\neq j,j+1$, $l_{j+1}'=l_j, l_j'=l_{j+1}$. Набор $(l_1',\dots,l_n')$ снова лежит в I_2. Для этого достаточно заметить, что $l_j'\geqslant i_j$ (из выбора j), $l_{j+1}'\geqslant i_{j+1}$ (из убывания последовательности i_j), $i_j\leqslant l_{j+1}'$. Отметим, что j — минимальный индекс, для которого $i_j\leqslant l_{j+1}'$.

Таким образом, отображение $(l_1,\dots,l_n)\mapsto(l_1',\dots,l_n')$ инволютивно, что дает разбиение множества I_2 на пары с требуемым свойством.

(2). Аналогично предыдущему случаю, мы должны доказать, что

$$s_\lambda(1+x_1)\dots(1+x_n)\Delta=\det(x_i^{\lambda_j+n-j}+x_i^{\lambda_j+1+n-j}) \tag{1.8}$$

совпадает с суммой $\sum_\mu s_\mu\Delta$, где суммирование ведется по всем диаграммам Юнга μ, которые получаются добавлением некоторого числа клеток к λ, так чтобы никакие две из добавленных клеток не лежали в одной строке. Разложим определитель в правой части (1.8) в сумму 2^n определителей, воспользовавшись аддитивностью по столбцам. Для набора $(k_1,\dots,k_n)$ из нулей и единиц определитель $\det(x_i^{k_j+\lambda_j+n-j})$ будет отличен от нуля лишь в том случае, если $(\lambda_1+k_1,\lambda_2+k_2,\dots,\lambda_n+k_n)$ будет диаграммой Юнга. Соответствующий определитель есть полином Шура, соответствующий данной диаграмме (умноженный на Δ). Все получающиеся таким образом диаграммы Юнга различны и суть в точности те, суммирование по которым и требовалось получить. □

Пример 11. Пусть $n=5$. Посчитаем $s_{(3,2,1^2)}h_2$, $s_{(3,2,1^2)}e_2$.

$s_{(3,2,1^2)}h_2=s_{(5,2,1^2)}+s_{(4,3,1^2)}+s_{(4,2^2,1)}+s_{(4,2,1^3)}+s_{(3^2,2,1)}+s_{(3^2,1^3)}+s_{(3,2^2,1^2)}+s_{(3,2^3)}$.

$s_{(3,2,1^2)}e_2=s_{(4,3,1^2)}+s_{(4,2^2,1)}+s_{(4,2,1^3)}+s_{(3^2,2,1)}+s_{(3^2,1^3)}+s_{(3,2^2,1^2)}+s_{(3,2^3)}$.

1.3. **Тождество Коши.**

Предложение 12. *Для переменных $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ имеет место равенство рядов в $K[[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n]]$*

(1.9)

$$\sum_\lambda s_\lambda(x)s_\lambda(y)=\det((1-x_iy_j)^{-1})_{i,j=\overline{1,n}}/(\Delta(x)\Delta(y))=\frac{1}{\prod_{i,j}(1-x_iy_j)}=\sum_\lambda h_\lambda(x)m_\lambda(y).$$

Здесь символ x в скобках означает, что соответствующие полиномы суть полиномы от x_i, аналогично y. Суммирование производится по всем диаграмм Юнга, состоящим не более чем из n строк.

Доказательство. Отметим, что $\frac{1}{\prod_{i,j}(1-x_iy_j)}=\prod_{j=1}^n(\sum_{i=0}^\infty h_i(x)y_j^i)$ (см. пример 9). Перемножив и сгруппировав коэффициенты при $h_{\lambda'}(x)$, получим равенство

$$\frac{1}{\prod_{i,j}(1-x_iy_j)}=\sum_\lambda h_\lambda(x)m_\lambda(y).$$

Докажем теперь, что

$$\sum_\lambda s_\lambda(x)s_\lambda(y)=\det((1-x_iy_j)^{-1})_{i,j=\overline{1,n}}/(\Delta(x)\Delta(y))$$

Распишем в определителе $\det((1-x_iy_j)^{-1})$ элементы как ряды от x_iy_j. Подсчитаем коэффициент при $y_1^{i_1}\dots y_n^{i_n}$ с $i_1,\dots,i_n$ в соответствующем ряду. Для этого мы должны оставить в первой строке все слагаемые с множителем $y_1^{i_1}$, во второй — с множителем $y_2^{i_2}$ и т.д. Эти множители вынесутся и получим коэффициент равный $\det(x_i^{i_j})_{i,j=\overline{1,n}}$. Таким образом,

$$\det((1-x_iy_j)^{-1})=\sum_{i_1>i_2>\dots>i_n}\det(x_i^{i_j})f_{i_1,\dots,i_n}(y) \tag{1.10}$$

для некоторых многочленов $f_{i_1,\dots,i_n}$ от $y_1,\dots,y_n$. Выясним чему равен многочлен $f_{i_1,\dots,i_n}$. Он равен коэффициенту в ряде $\det((1-x_iy_j)^{-1})$ при мономе $x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}$ (ибо все мономы определителя $\det(x_i^{i_j})$ суть $x_{\sigma(1)}^{i_1}\dots x_{\sigma(n)}^{i_n}$ для некоторой подстановки σ). Поскольку

$\det((1-x_iy_j)^{-1})$ симметричен относительно x, y, то $f_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ равен $\det(y_i^{i_j})$. Таким образом,

$$\det((1-x_iy_j)^{-1}) = \sum_{i_1>i_2>\ldots>i_n} \det(x_i^{i_j})\det(y_i^{i_j}).$$

Разделив обе части предыдущего равенства на $\Delta(x)\Delta(y)$, получим требуемое.

Остается доказать, что

$$\det((1-x_iy_j)^{-1})_{i,j=\overline{1,n}} = \frac{\Delta(x)\Delta(y)}{\prod_{i,j}(1-x_iy_j)} \tag{1.11}$$

Доказательство проводится индукцией по n. Для $n=1$ формула очевидна. Для данного n вычтем первую строку из всех остальных. На месте i, j с $i>j$ будем иметь элемент

$$\frac{1}{1-x_iy_j} - \frac{1}{1-x_1y_j} = \frac{y_j(x_i-x_1)}{(1-x_1y_j)(1-x_iy_j)}.$$

Вынесем общий множитель $(1-x_1y_j)^{-1}$ из j-ого столбца и x_i-x_1 из i-ой строки. Отметим, что в первой строке стоят единицы, а на позиции (i,j) для $i>1$ — дробь $\frac{y_j}{1-x_iy_j}$. Вычтем теперь первый столбец из всех оставшихся. В первой строке получим $(1,0,0,\dots,0)$, а в позиции (i,j) с $i,j>1$:

$$\frac{y_j}{1-x_iy_j} - \frac{y_1}{1-x_iy_1} = \frac{y_j-y_1}{1-x_iy_1}\frac{1}{1-x_iy_j}.$$

Вынесем общие множители и получим, что

$$\det((1-x_iy_j)^{-1})_{i,j=\overline{1,n}} =$$
$$= (1-x_1y_1)^{-1}\Big(\prod_{i=2}^{n}(x_1-x_i)(y_1-y_i)(1-x_1y_i)^{-1}(1-x_iy_1)^{-1}\Big)\det((1-x_iy_j)^{-1})_{i,j=\overline{2,n}}.$$

□