ЛЕКЦИЯ 12

Оглавление

1. Симметрические многочлены. Продолжение

1.1. Основная теорема о симметрических многочленах.

Теорема 1. *Любой симметрический многочлен единственным образом представляется в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов* $e_i, i = \overline{1, n}$.

Доказательство. Многочлены m_λ, где λ — диаграмма Юнга из m клеток с не более чем n строками, составляют базис в модуле $R[x_1, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}_m$ симметрических многочленов степени m. С другой стороны имеем $p_n(m)$ многочленов $e_{\lambda'}$, занумерованных теми же диаграммами. Пусть $a_{\lambda\mu}$ — такие элементы из R, что $e_{\lambda'} = \sum_\mu a_{\lambda\mu} m_\mu$.

Требуемое утверждение состоит в том, что многочлены $e_{\lambda'}$ с указанными диаграммами λ составляют базис в модуле $R[x_1, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}_m$. Для доказательства этого достаточно показать, что $a_{\lambda\mu} \neq 0$ влечет $\mu \leqslant \lambda$ и что $a_{\lambda\lambda} = 1$. Действительно, в этом случае m_λ однозначно выражается через e_μ. Упорядочим теперь диаграммы лексикографически по убыванию: $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$. Матрица $(a_{\lambda_i\lambda_j})$ будет верхнетреугольной с единицами на диагонали.

Введем отношение порядка на множестве мономов $x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$ с $i_1 + \ldots + i_n = m$: $x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} \leqslant x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n}$, если $\sum_{k=1}^d i_k \leqslant \sum_{k=1}^d j_k$ для $d = \overline{1, n}$. Очевидным свойством такого порядка является его аддитивность: если $m_1 \geqslant m_2, m_3 \geqslant m_4$, то $m_1 m_3 \geqslant m_2 m_4$. Если же при этом $m_1 m_3 = m_2 m_4$, то $m_1 = m_2, m_3 = m_4$.

Понятно, что моном $x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n}$ строго больше всех остальных мономов в m_λ, и что $m_\lambda \geqslant m_\mu$ тогда и только тогда, когда $x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n}$ больше либо равен всех мономов, входящих в запись m_μ.

Из замечаний предыдущего абзаца следует, что достаточно показать, что моном $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n}$ входит в $e_{\lambda'}$ с коэффициентом 1, и что все остальные мономы строго меньше этого. В этом нам поможет следующая

Лемма 2. *Пусть* f, g *— однородные многочлены степеней* k, l,

$$f = \sum_{i_1 + \ldots + i_n = k} a_{i_1, i_2 \ldots, i_n} x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_n}, g = \sum_{i_1 + \ldots + i_n = k} b_{i_1, i_2 \ldots, i_n} x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_n}$$

и мономы m_f, m_g *— наибольшие среди всех мономов, входящих в* f *и* g*, соответственно, с ненулевыми коэффициентами* c_f, c_g *(т.е. строго большие всех остальных таких мономов). Тогда моном* $m_f m_g$ *входит в* fg *с коэффициентом* $c_f c_g$*. Если* $c_f c_g \neq 0$ *— то это наибольший моном с ненулевым коэффициентом в* fg.

Доказательство леммы. Непосредственное следствие свойств аддитивности порядка, приведенных выше. □

Для доказательства утверждения про наибольший моном в $e_{\lambda'}$ осталось заметить, что наибольшим мономом в e_i является $x_1x_2\dots x_i$ и применить лемму к произведению $e_{\lambda'} = e_{\lambda'_1}e_{\lambda'_2}\dots e_{\lambda'_m}$ (скажем степень при x_1 в наибольшем мономе будет равна максимальному числу m, для которого $\lambda'_m > 0$, т.е. λ_1, при x_2 — максимальному m, для которого $\lambda'_m > 1$, т.е. λ_2, и т.д.). □

Доказанная теорема дает алгоритм, позволяющий представить некоторый симметрический многочлен f в виде многочлена от e_i. В самом деле, выберем линейное упорядочивание на множестве диаграмм Юнга (или мономиальных симметрических многочленов, что все равно) как в доказательстве предыдущей теоремы. Пусть $f = \sum a_i m_{\lambda_i}$ с $a_1 = \ldots = a_i = 0, a_{i+1} \neq 0$. У многочлена $f - a_i e_{\lambda'_i}$ коэффициенты при $m_{\lambda_1}, \dots m_{\lambda_{i+1}}$ равны 0. Продолжая в том же духе получим требуемое разложение.

1.2. **Различные базисы в алгебре симметрических многочленов и матрицы перехода.** Выведем сначала следствие из предложения 12 предыдущей лекции.

Следствие 3. *Пусть $s_\lambda = \sum_\mu a_{\lambda\mu} m_\mu$ — разложение по базису. Тогда $h_\lambda = \sum a_{\mu\lambda} s_\mu$.*

Доказательство. Из предыдущего предложения следует, что

$$\sum_\lambda s_\lambda(x)s_\lambda(y) = \sum_\lambda h_\lambda(x)m_\lambda(y).$$

Перепишем это в виде

$$\sum_\lambda h_\lambda(x)m_\lambda(y) = \sum_\lambda s_\lambda(x)(\sum_\mu a_{\lambda\mu}m_\mu(y)) = \sum_\lambda(\sum_\mu a_{\mu\lambda}s_\mu(x))m_\lambda(y).$$

Второе равенство получено заменой порядка суммирования и переобозначением. Сравнив теперь коэффициенты при $m_\lambda(y)$ в крайних частях предыдущего равенства, получим требуемое. □

Для данной диаграммы Юнга из m клеток с не более чем n строками мы рассмотрели следующие наборы симметрических многочленов, параметризованных λ: m_λ, $e_{\lambda'}$, h_λ, s_λ. Первые два набора образуют базис в R-модуле $R[x_1,\dots,x_n]^\sigma_m$. Оказывается, что оставшиеся два тоже.

Для того, чтобы это увидеть, введем одно важное понятие:

Определение 4. Пусть λ, μ — диаграммы Юнга из одинакового числа клеток. *Полустандартной таблицей Юнга типа μ на λ* называется диаграмма λ, заполненная μ_1 единицами, μ_2 двойками и т.д. так, чтобы числа по столбцам строго возрастали, а по строкам возрастали нестрого. Количество полустандартных таблиц типа μ на λ обозначается через $K_{\lambda\mu}$ и называется числом Костки.

Отметим, что непосредственно из определений чисел Костки следует, что $K_{\lambda\lambda} = 1$, и что $K_{\lambda\mu} \neq 0$, если и только если $\mu \leqslant \lambda$. Действительно, поскольку первые i чисел в полустандартной таблице должны содержаться в первых i строках (ибо по столбцам все числа возрастают). Отсюда следует, что $K_{\lambda\mu} > 0 \Rightarrow \lambda \geqslant \mu$. Теперь равенство $K_{\lambda\lambda} \leqslant 1$ следует из того, что числа по строкам не убывают. С другой стороны, для $\lambda \geqslant \mu$ всегда существует полустандартная таблица типа μ на λ: надо взять и выписать числа по возрастанию слева направо и сверху вниз.

Предложение 5. (1) *Для любой диаграммы λ*

$$h_\lambda = \sum K_{\mu\lambda}s_\mu. \tag{1.1}$$

(2) *Для диаграммы λ с не более чем n столбцами*

$$e_\lambda = \sum K_{\mu\lambda}s_{\mu'}. \tag{1.2}$$

Суммирование в обоих случаях производится по диаграммам μ из $|\lambda|$ клеток с не более чем n строками.

Доказательство. Доказательство первого утверждения основано на пункте 1 предложения 10 предыдущей лекции. В самом деле, $h_\lambda = h_{\lambda_1}\dots h_{\lambda_k}$. По первой формуле Пьери, это произведение равно сумме многочленов Шура s_μ, где диаграмма μ получается добавлением λ_2 клеток к диаграмме (λ_1), так чтобы две добавленные клетки не попали в один столбец, затем добавления к получившейся диаграмме λ_3 клеток с тем же правилом. Кратность многочлена s_μ в этой сумме равно числу способов произвести такие добавления, чтобы получить μ. Последовательность добавлений можно кодировать так: в первоначальные λ_1 клеток мы ставим 1, в добавленные на первом шаге λ_2 клеток — 2, в следующие λ_3 — 3 и т.д. Т.е. каждой последовательности добавлений ставится в соответствие полустандартная таблица Юнга на μ типа λ. Это соответствие взаимно-однозначно.

Для доказательства равенства (1.2) надо воспользоваться формулой из второй части предложения 10 предыдущей лекции и тем соображением, что добавить клетки к диаграмме μ так, чтобы они не попали в одну строку, это все равно, что добавить клетки к μ' так, чтобы они не попали в один столбец (ибо строки μ' соответствуют столбцам μ и наоборот). $\square$

Следствие 6. *Наборы h_λ, s_λ являются базисами в $R[x_1,\dots,x_n]_\lambda^{\mathfrak{S}_n}$. Имеет место равенство $s_\lambda = \sum_\mu K_{\lambda\mu} m_\mu$.*

Доказательство. То, что s_λ образуют базис следует из (1.2). Действительно, e'_λ образуют базис, а матрица перехода невырождена (если упорядочить диаграммы с не более чем n столбцами лексикографически, то матрица перехода будет нижнетреугольной).

Поэтому представление h_λ в виде линейной комбинации s_μ единственно. Представление s_λ в виде линейной комбинации m_μ следует из (1.1) и следствия 3. Отметим, что линейная замена в правой части (1.1) (где λ принадлежит требуемому множеству) невырождена (см. выше). Поэтому h_λ образуют базис. $\square$

1.3. **Дискриминант и результант.** Пусть K — алгебраически замкнутое поле. Рассмотрим многочлен $f \in K[X], f = \sum_{i=0}^n a_i x^i, a_n \neq 0$. Имеем разложение f на линейные множители $f = a_n \prod_{i=1}^n (x - x_i)$. Следующее предложение носит название *обобщенного разложения Виета.* Доказывается оно раскрытием скобок.

Предложение 7. $e_i(x_1,\dots,x_n) = (-1)^i \frac{a_{n-i}}{a_n}$ *(здесь мы считаем, что $e_0 = 1$). В частности, имеет место равенство многочленов $x_i^n - e_1(x_1,\dots,x_n)x_i^{n-1} + \ldots \pm e_n(x_1,\dots,x_n) = 0$.*

Дискриминантом многочлена f называется число

$$D(f) = a_n^{2n-2}\prod_{i<j}(x_i - x_j)^2.$$

Это симметрический многочлен от x_i. Поэтому, согласно предложению 7, он представляется в виде $a_n^{2n-2}P(\frac{a_0}{a_n},\dots,\frac{a_{n-1}}{a_n})$, где P — некоторый многочлен, не зависящий от f. Отметим, что дискриминант многочлена f обращается в 0 тогда и только тогда, когда f имеет кратный корень.

Пусть $g = \sum_{i=0}^m b_m x^i, b_m \neq 0$ — ещё один многочлен с разложением $g = b_m \prod_{i=1}^m (x - y_i)$. *Результантом* многочленов f, g называется число

$$Res(f,g) = a_n^m b_m^n \prod_{i,j}(x_i - y_j).$$

Заметим, что

$$Res(f,g) = a_n^m \prod_{i=1}^{n} g(x_i), \tag{1.3}$$

$$Res(f,g) = (-1)^{mn} b_m^n \prod_{j=1}^{m} f(x_j). \tag{1.4}$$

Отметим, что $Res(f,g) = 0$ тогда и только тогда, когда многочлены f, g имеют общий корень.

Результант можно понимать как многочлен из $A = K[a_n, b_m, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$. Из (1.3) следует, что результант можно записать как многочлен от $a_n, b_0, \dots, b_m, x_1, \dots, x_n$ (напомним, что $a_0, \dots, a_{n-1}$ — многочлены от $a_n, x_1, \dots, x_n$). Из основной теоремы следует, примененной к симметрическим многочленам от переменных $y_1, \dots, y_m$ с коэффициентами в кольце $K[a_n, b_m, x_1, \dots, x_n]$, что такое представление единственно. Отметим, что полученный многочлен симметричен по $x_1, \dots, x_n$. Таким образом, $Res(f,g)$ записывается единственным образом как многочлен от переменных $a_n, b_0, \dots, b_m, \frac{a_0}{a_n}, \dots, \frac{a_{n-1}}{a_n}$. Такой многочлен однозначно разлагается в сумму мономов от a_i, b_j, у которых допускается отрицательная степень при a_n. Воспользовавшись (1.4), мы получим, что $Res(f,g)$ есть многочлен от $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0, b_m, \frac{b_{m-1}}{b_m}, \dots, \frac{b_0}{b_m}$. Воспользовавшись аналогичным представлением такого многочлена в виде суммы мономов, выводим, окончательно, что результант является многочленом от a_i, b_j.

Следующее предложение дает (неэффективный) способ вычисление результанта и дискриминанта.

Предложение 8. *Во введенных обозначениях*

$$Res(f,g) = \det \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \dots & & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & & b_0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & & b_0 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

$$D(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} Res(f, f')/a_n. \tag{1.6}$$

В равенстве (1.5) матрица берется размера $m+n$, в первых m строках записаны коэффициенты многочлена f, в оставшихся n — коэффициенты многочлена g.

Доказательство. Докажем первое равенство. Обозначим определитель в правой части через Δ. Отметим, что $\Delta/(a_n^m b_m^n)$ есть многочлен от x_i, y_j. Докажем, что этот многочлен делится на $Res(f,g)/(a_n^m b_m^n)$. Разделив первые m строк на a_n, а последние на b_m можем считать, что $a_n = b_m = 1$. Достаточно показать, что $\Delta = 0$, если $x_i = y_j$, т.е. если x_i является корнем многочлена g. Преобразуем наш определитель преобразованиями столбцов. Прибавим ко второму столбцу первый умноженный на x_i. Затем прибавим к третьему столбцу второй, умноженный на x_i и т.д. вплоть до прибавления к $m+n$-ому столбцу $m+n-1$-ого, умноженного на x_i. Посмотрим, что стоит в последнем столбце. Для $j \leqslant m$ на пересечении j-ой строки и последнего столбца стоит $x_i^{m-j} f(x_j) = 0$. Для $j > m$: $x_i^{m+n-j} g(x_i)$. Таким образом, если $g(x_i) = 0$, то определитель в правой части равен 0.

Таким образом, $\Delta/Res(f,g)$ есть многочлен от x_i, y_j. Заметим, что он симметричен (по отдельности) по x_i и по y_j. Таким образом, см. обсуждение выше, он есть многочлен от $\frac{a_i}{a_n}, \frac{b_j}{b_m}, i < n, j < m$. Отсюда, вынеся a_n, b_m из знаменателей, имеем равенство

$a_n^k b_m^l \Delta = P Res(f,g)$, где P — однородный многочлен от a_i, b_j степени k, l, взаимно простой с a_m, b_n а $k, l \geqslant 0$.

Покажем, что $Res(f,g)$, рассматриваемый как многочлен от a_i, b_j не делится на a_n. Пусть это не так. Рассмотрим результант как элемент из $K[a_n, b_m, b_{m-1}, \ldots, b_0, x_1, \ldots, x_n]$. $Res(f,g)$ представляется в виде $\prod_{i=1}^n g(x_i)$, т.е. не зависит от a_n, и стало быть не делится на a_n. Если бы частное $Res(f,g)/a_n$ было бы многочленом от a_i, b_j, то оно было бы многочленом и от a_n, b_j, x_i. Противоречие.

Итак, $k = l = 0$ и $P = const$. Для доказательства равенства $\Delta = Res(f,g)$ остается сравнить коэффициенты при $b_0^n a_n^m$ в $Res(f,g)$ и Δ (оба равны 1).

Докажем теперь равенство (1.6). Для доказательства отметим, что $f'(x) = a_n \sum_i (x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)$. Поэтому

$$Res(f,f') = a_n^{n-1} \prod_{i=1}^n f'(x_i) = a_n^{2n-1} \prod_{i=1}^n (x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n) =$$
$$= a_n (-1)^{n(n-1)/2} D(f).$$

□

Для формулировки следующего свойства уместно вспомнить, что имеется естественное соответствие между многочленами степени $\leqslant n$ от одной переменной и однородными многочленами от двух переменных степени n. Именно, однородному многочлену $\sum_{i=0}^n a_i x^i y^{n-i}$ ставится в соответствие многочлен $\sum_{i=0}^n a_i x^i$. Любой однородный многочлен степени n от двух переменных разлагается в произведение n линейных многочленов:

$$f(x,y) = \prod_{i=1}^n (\alpha_i x - \beta_i y),$$

где пары (α_i, β_i) определены не однозначно, а лишь с точностью до умножения на константы, произведение которых равно 1.

Дискриминантом такого многочлена называется

$$D(f) = \prod_{i<j} (\alpha_i \beta_j - \beta_i \alpha_j)^2. \tag{1.7}$$

Немедленно проверяется, что $D(f)$ не зависит от выбора пар (α_i, β_i), и что при $a_n = \alpha_1 \ldots \alpha_n \neq 0$, это определение согласованно с тем, которое было дано выше (в этом случае $x_i = \frac{\beta_i}{\alpha_i}$). Точнее, оба дискриминанта суть одинаковые многочлены от $a_0, \ldots, a_n$.

Нам понадобится следующая общая конструкция. Именно, пусть $x_1, \ldots, x_n$ — переменные, а M — невырожденная $n \times n$-матрица с коэффициентами из K. Матрице $M = (m_{ij})$ сопоставляется отображение $\sigma_M : K[x_1, \ldots, x_n] \to K[x_1, \ldots, x_n]$, $f(x_1, \ldots, x_n) = f(m_{11}x_1 + \ldots + m_{1n}x_n, \ldots, m_{n1}x_1 + \ldots + m_{nn}x_n)$. Понятно, что σ_M — гомоморфизм алгебры $K[x_1, \ldots, x_n]$, оставляющий на месте однородные компоненты. Из правила умножения матриц следует, что $\sigma_{M_1 M_2} = \sigma_{M_2} \sigma_{M_1}$. Поэтому σ_M — автоморфизм.

Рассмотрим теперь матрицу $M \in \mathrm{SL}_2(K)$. Можем определить невырожденное линейное преобразование σ_M пространства $K[x,y]_n$ однородных многочленов степени n от двух переменных.

Следующее свойство называется SL_2-*инвариантностью* дискриминанта.

Предложение 9. *$D(f) = D(\sigma_M f)$ для всех $M \in \mathrm{SL}_2(K)$.*

Доказательство. Воспользуемся обозначениями введенными выше:

$$\sigma_M f = \prod_{i=1}^n \sigma_M(\alpha_i x - \beta_j y) = \prod_{i=1}^n ((m_{11}\alpha_i - m_{21}\beta_i)x - (m_{22}\beta_i - m_{12}\alpha_i)y)$$

Из (1.7) имеем

$$D(\sigma_M f)=\prod_{i<j}\left((m_{11}\alpha_i-m_{21}\beta_i)(m_{22}\beta_j-m_{12}\alpha_j)-(m_{11}\alpha_j-m_{21}\beta_j)(m_{22}\beta_i-m_{12}\alpha_i)\right)^2=$$

$$=\prod_{i<j}\left((m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21})(\alpha_i\beta_j-\beta_j\alpha_i)\right)^2=D(f).$$

□

Пафос предыдущего предложения таков. На $K[x,y]_n$ есть естественное отношение эквивалентности — два многочлена эквивалентны, если они получаются друг из друга невырожденной линейной заменой переменных. Нам интересно изучать классы эквивалентности. Для этого полезно знать многочлены (в данном случае от $n+1$ переменной), которые постоянны на классах эквивалентности. Если брать произвольные линейные замены, то нетривиальных таких просто нет (причина: в каждом классе найдутся элементы сколь угодно "близкие" к 0, значение каждого многочлена, постоянного на классе эквивалентности, равно значению в точке 0). Поэтому разумно ограничиться преобразованиями с определителем 1. Предыдущее предложение показывает, что дискриминант обладает требуемым свойством. Аналогично можно показать, что результант двух многочленов также постоянен на классах эквивалентности (предполагается, что производится одновременная замена переменных).

Предложение 10. *При* $\operatorname{char} K\neq 2$ *дискриминант является неприводимым многочленом в* $K[a_n,\ldots,a_0]$.

Доказательство. От противного пусть $D(f):=D=PQ$, где $\deg P,\deg Q>0$. Воспользуемся обозначениями введенными в начале пункта и рассмотрим $D(f),P,Q$ как элементы из $K[a_n,x_1,\ldots,x_n]$. Предположим, что $(x_i-x_j)|P$. Поскольку P — симметрический многочлен от x_i, то $\prod_{i<j}(x_i-x_j)|P$. Мы видим отсюда, что $(x_i-x_j)\not|Q$ для всех i,j. Иначе $\prod_{i<j}(x_i-x_j)|Q$ и $P=a_n^k\prod_{i<j}(x_i-x_j)$. Это дает, что P не симметричен по x_i. Таким образом, можем считать, что $Q=a_n$. Отметим, что $a_0=\pm a_nx_1\ldots x_n$ не делит D, ибо $x_1\ldots x_n$ не делит $\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2$.

Теперь перейдем к конструкции дискриминанта через однородные многочлены. Рассмотрим матрицу $M=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2(K)$. Преобразование σ_M пространства $K[x,y]_n$ в базисе $v_i=x^iy^{n-i}, i=\overline{0,n}$ задается матрицей $\widetilde{M}$ переставляющей e_i и e_{n-i} (и меняющей некоторым образом знаки, но нам это не важно). Рассмотрим автоморфизм $\sigma_{\widetilde{M}}$ алгебры $K[a_0,\ldots,a_n]$. Предложение 9 означает, что $\sigma_{\widetilde{M}}D=D$. Поэтому $a_0=\pm\sigma_{\widetilde{M}}a_n$ является делителем D, что не так. □

1.4. $R[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$-модуль $R[x_1,\ldots,x_n]$.

Теорема 11. $R[x_1,\ldots,x_n]$ *— свободный модуль над* $R[x_1,\ldots,x_n]^{S_n}$ *ранга* $n!$. *Базис составляют мономы* $x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_{n-1}^{i_{n-1}}$ *с* $0\leqslant i_j\leqslant n-j, j=\overline{1,n-1}$.

Доказательство. Покажем, что любой моном как-то представляется в требуемом виде. Пусть это доказано для всех мономов степени $<m$ и пусть $i_1+\ldots+i_n=m$, а $P=x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$.

Пусть P — максимальный относительно лексикографического порядка мономах (моном $x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$ считается большим монома $x_1^{j_1}\ldots x_n^{j_n}$, если $i_1=j_1,\ldots,i_{l-1}=j_{l-1},i_l>j_l$), среди тех, которые не представляются в указанном виде. Пусть j таково, что $i_j>n-j$. Заметим, что, по формуле Виета,

$$x_j^{n-j+1}=\sum_{i=1}^{j}(-1)^{i-1}e_i(0,\ldots,0,x_j,\ldots,x_n)x_j^{n-j+1-i}.$$

Рассмотрим разность

$$P - \sum_{i=1}^{j} (-1)^{i-1} e_i P / x_j^i$$

Все мономы, встречающиеся в этом выражении имеют вид $(P/x_j^i) x_{j_1} \dots x_{j_i}$, где хотя бы одно из чисел $j_1, \dots, j_k$ меньше j, и, значит, больше чем P. По предположению индукции, P_j / x_j^i представляются в требуемом виде. Противоречие с выбором P.

Итак, пусть представление элемента в виде требуемой линейной комбинации не единственно. В противном случае найдутся ненулевые симметрические многочлены $a_{i_1,\dots,i_n}$ с $0 \leqslant i_j \leqslant n-j$, для которых верно равенство

$$\sum_{i_1,\dots,i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} a_{i_1,\dots,i_n} = 0.$$

Мы докажем следующее утверждение убывающей индукцией по $m \in \{0, \dots, n\}$: для любых $j_{m+1}, \dots, j_n$ из соответствующих промежутков верно равенство

$$\sum_{i_1,\dots,i_m} x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m} a_{i_1,\dots i_m, j_{m+1},\dots,j_n} = 0.$$

Отметим, что для $m = 0$ эти равенства означают обращение всех $a_{\dots}$ в 0. База индукции $(m = n)$ у нас уже есть.

Шаг индукции: пусть верно для m. Для $j \in \{0, \dots, n-m+1\}$ положим

$$A_j = \sum_{i_1,\dots,i_m} x_1^{i_1} \dots x_{m-1}^{i_{m-1}} a_{i_1,\dots i_{m-1}, j, j_{m+1},\dots,j_n}.$$

Имеем уравнение

$$\sum_{j=0}^{n-m+1} x_m^j A_j = 0.$$

Заметим, что суммы A_j не меняются при перестановке переменных $x_m, \dots, x_n$, потому, что их слагаемые суть произведения мономов, не зависящих от этих переменных, и симметрических многочленов. Получаем $n - m + 1$ линейных уравнений

$$\sum_{j=0}^{n-m+1} x_i^j A_j = 0, i = \overline{n, m}.$$

Определителем этой системы является определитель Ван дер Монда Δ_{n-m+1}. Имеют место равенства $\Delta_{n-m+1} A_j = 0$. Поскольку Δ_{n-m+1} не является делителем нуля в $R[x_1, \dots, x_n]$, получаем $A_j = 0$. Это и есть требуемое. $\square$