Домашний экзамен по представлениям групп к 18 декабря 2005

a) Докажите, что группы $PSL(2, \mathbb{F}_9)$ и $\mathfrak{A}_6$ изоморфны.

b) Сопоставьте 7 классов сопряженности в $PSL(2, \mathbb{F}_9)$ и 7 классов сопряженности в $\mathfrak{A}_6$, 7 неприводимых представлений $PSL(2, \mathbb{F}_9)$ и 7 неприводимых представлений $\mathfrak{A}_6$ и сравните (отождествите) таблицы характеров.

Пункт b) можно решить и без пункта a); за это ставится оценка 3–4. За решение пункта a) (плюс пункт b) без использования следующего указания[1] ставится оценка 5+; с использованием — 4–5. Удачи!

Мой телефон 1484369. Я приду в НМУ в воскресенье 18 декабря в 11.00 и уйду в 11.15, если Вы со мной не договоритесь о чем-нибудь другом.

[1] *Указание:* Чтобы построить гомоморфизм $PSL(2, \mathbb{F}_9) \to \mathfrak{A}_6$, надо предъявить действие $PSL(2, \mathbb{F}_9)$ на 6-элементном однородном пространстве, т.е. предъявить подгруппу $H \subset PSL(2, \mathbb{F}_9)$ (изоморфную $\mathfrak{A}_5$) индекса 6. Вспомним вложение $\rho_\tau^+ : SL(2, \mathbb{F}_5) \hookrightarrow SL(2, \mathbb{C})$ из задачи 1a) к 5 декабря, или после факторизации по центру, $\rho_\tau^+ : PSL(2, \mathbb{F}_5) \hookrightarrow PSL(2, \mathbb{C})$. Проверьте, что это вложение на самом деле определено над целыми алгебраическими числами (а не над всеми комплексными) и после редукции по модулю 3 дает искомое вложение $\mathfrak{A}_5 \simeq PSL(2, \mathbb{F}_5) \hookrightarrow PSL(2, \mathbb{F}_9)$. Иными словами, ρ_τ^+ определено над полем $\mathbb{F}_9$.