Конструкция Юнга

На предыдущей лекции была анонсирована явная конструкция неприводимых представлений симметрической группы. А именно, по таблице Юнга T строится элемент e_T групповой алгебры симметрической группы: $e_T = r_T c_T$, где $r_T = \sum\limits_{\sigma\in R(T)} \sigma$ — симметризатор по подгруппе $R(T)$, сохраняющей каждую строку T (как множество), $c_T = \sum\limits_{\sigma\in C(T)} \sigma$ — кососимметризатор по подгруппе $C(T)$, сохраняющей каждый столбец T. Утверждается, что неприводимые представления симметрической группы реализуются в левых идеалах групповой алгебры, порождённых такими элементами. Для доказательства этого нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения.

Предложение 1. *$e_T^2 = \mu_T e_T$ для некоторого $\mu_T \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.*

Доказательство. Для доказательства заметим, что для $\rho \in R(T)$, $\sigma \in C(T)$ верны равенства $\rho e_T = (\rho r_T)c_T = r_T c_T = e_T$, $e_T\sigma = r_T(c_T\sigma) = (-1)^\sigma e_T$, и потому $\rho e_T^2\sigma = (-1)^\sigma e_T^2$. Докажем следующее общее утверждение.

Лемма 1. *Если $x \in \mathbb{C}[S_n]$ таково, что для $\rho \in R(T)$, $\sigma \in C(T)$ верно равенство $\rho x\sigma = (-1)^\sigma x$, то $x \in \mathbb{C}e_T$.*

Доказательство леммы. Действительно, запишем $x = \sum_\tau a_\tau\tau$. Условие леммы означает, что для $\rho \in R(T)$, $\sigma \in C(T)$ имеют место равенства $a_\tau = (-1)^\sigma a_{\rho\tau\sigma}$. Если положить $\tau = 1$, то получим $a_{\rho\sigma} = (-1)^\sigma a_1$, и потому $x = a_1 e_T + \sum_{\tau\notin R(T)C(T)} a_\tau\tau$.

Проверим, что последняя сумма равна нулю. Докажем для этого, что для такой перестановки τ найдутся два числа a, b лежащие в одной строке T и в одном столбце τT. Если это будет доказано, то доказательство леммы будет завершено так: положим $\pi = (a, b) \in R(T) \cap C(\tau T)$. Ясно, что $\pi = \tau\delta\tau^{-1}$ для некоторого $\delta \in C(T)$. Теперь $a_\tau = (-1)^\delta a_{\pi\tau\delta^{-1}} = (-1)^\pi a_\tau = -a_\tau$, откуда $a_\tau = 0$.

Итак, докажем, что для перестановки τ реализуется в точности одна из двух возможностей: либо τ принадлежит $R(T)C(T)$, либо найдутся два числа из одной строки диаграммы T и в одном столбце диаграммы τT.

Если любые два числа из одной строки диаграммы T лежат в разных столбцах диаграммы τT, то все числа первого столбца диаграммы τT лежат в разных строках диаграммы T.Значит, найдётся перестановка $\rho_1 \in R(T)$, для которой все эти числа лежат в первом столбце диаграммы $\rho_1 T$. Продолжая этот процесс, мы найдём $\rho \in R(T)$, для которого все множества элементов столбцов диаграмм ρT и τT совпадают. Тогда для некоторой перестановки $\sigma' \in C(\rho T)$ получим $\tau T = \sigma'\rho T$. Но $C(\rho T) = \rho C(T)\rho^{-1}$, откуда $\sigma' = \rho\sigma\rho^{-1}$ для некоторого $\sigma \in C(T)$. Имеем $\tau T = \sigma'\rho T = \rho\sigma\rho^{-1}\rho T = \rho\sigma T$, и $\tau = \rho\sigma$, что и требовалось.

Значит, для $\tau \notin R(T)C(T)$ имеем $a_\tau = 0$, и $x = a_1 e_T$. □

Мы получаем, что e_T^2 пропорционально e_T. Заметим, что оба этих элемента лежат в целочисленном групповом кольце $\mathbb{Z}[S_n]$, причём в e_T коэффициент при единице равен 1. Значит, коэффициент пропорциональности — целое число. Почему оно не равно нулю?

Посчитаем след e_T в регулярном представлении. Раз единица входит с коэффициентом 1, след равен $n!$. А если бы $e_T^2 = 0$, то след был бы равен нулю (жорданова форма!). Противоречие. $\square$

Лемма 2. *Пусть A — произвольная алгебра, $e, f \in A$ — проекторы ($e^2 = e$, $f^2 = f$). Тогда существует канонический изоморфизм $\mathrm{Hom}_A(Ae, Af) \simeq eAf$.*

Доказательство леммы. Если $b = eaf \in eAf$, то зададим $\psi_b \in \mathrm{Hom}_A(Ae, Af)$ формулой $\psi_b(c) = cb = ceaf \in Af$. Если $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(Ae, Af)$, то чтобы задать значение на всех элементах, достаточно, очевидно, задать значение $\varphi(e)$. Пусть $\varphi(e) = af$. Заметим, что $af \in eAf$, поскольку $\varphi(e) = \varphi(e^2) = e\varphi(e)$. Сопоставим гомоморфизму φ элемент eaf. Легко убедиться, что построенные отображения взаимно обратны. $\square$

Предложение 2. *В пространстве $\mathbb{C}[S_n]e_T$ реализуется неприводимое представление S_n.*

Доказательство. Применим доказанную лемму (то, что e_T — не совсем проектор, не важно: поделив его на μ_T, мы не изменим участвующие в лемме пространства): $\mathrm{Hom}_{S_n}(\mathbb{C}[S_n]e_T, \mathbb{C}[S_n]e_T) \simeq e_T\mathbb{C}[S_n]e_T$. Рассмотрим элемент этого пространства. Он имеет вид $e_T x e_T$, где $x \in \mathbb{C}[S_n]$. Аналогично предыдущему имеем $\rho x \sigma = (-1)^\sigma x$ для всех $\rho \in R(T)$, $\sigma \in C(T)$, откуда $x \in \mathbb{C}e_T$, т.е. пространство $e_T\mathbb{C}[S_n]e_T$ одномерно. Из этого следует, что представление неприводимо: число сплетения в таком случае равно сумме квадратов кратностей неприводимых слагаемых. $\square$

Предложение 3. *Если T_1 и T_2 — две таблицы разной формы, то получающиеся представления неизоморфны.*

Доказательство. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть даны таблица T формы α и таблица S формы β. Если α лексикографически больше β, то $e_S e_T = 0$.*

Доказательство леммы. Мы докажем даже, что $c_S r_T = 0$. Проверим сначала, что найдутся два числа, лежащие в одной строке T и в одном столбце S. Если это не так, то символы первой строки T лежат в разных столбцах S. Число этих столбцов равно длине первой строки S и потому не больше количества чисел первой строки T, значит, первые строки имеют одинаковые длины. Значит, можно подействовать на S перестановкой из $R(S)$ и получить таблицу, у которой первая строка та же, что у T, и все числа из одинаковых строк T по-прежнему лежат в этой таблице в разных столбцах. Продолжая в том же духе, получим, что таблицы имеют одинаковую форму. Противоречие. Значит, найдутся два числа a, b из одной строки T и одного столбца S. Положим $\pi = (a, b) \in R(T)C(S)$. Заметим, что $c_S r_T = c_S \pi^{-1} \pi r_T = (-1)^\pi c_S r_T$, откуда $c_S r_T = 0$. $\square$

Пусть таблицы S и T такие, как в лемме. Тогда $\mathrm{Hom}_{S_n}(\mathbb{C}[S_n]e_S, \mathbb{C}[S_n]e_T) \simeq e_S\mathbb{C}[S_n]e_T$, и достаточно проверить, что $e_S \sigma e_T = 0$ для каждой перестановки σ. Но $e_S \sigma e_T = e_S(\sigma e_T \sigma^{-1})\sigma = e_S e_{\sigma T} \sigma = 0$ по доказанному. Значит, представления неизоморфны. $\square$

Замечание 1. *Поскольку число классов сопряжённости S_n равно числу диаграмм Юнга, мы построили все неприводимые представления S_n.*

Предложение 4. *Размерность представления $\mathbb{C}[S_n]e_T$ равна числу стандартных таблиц Юнга той же формы, что и T (напомним, что стандартная таблица — это таблица, в которой числа возрастают слева направо и сверху вниз).*

Доказательство. Проверим сначала, что кратность представления $\mathbb{C}[S_n]e_T$ в групповой алгебре не меньше, чем число стандартных таблиц той же формы, что и T. Проверим для этого, что сумма всех идеалов $\mathbb{C}[S_n]e_T$ по таблицам T данной формы α прямая. Рассмотрим лексикографическое упорядочение всех таблиц формы α: будем читать строки сверху вниз, а каждую строку — слева направо; таблица T больше таблицы S, если для неё получающаяся при прочтении последовательность лексикографически больше.

Лемма 4. *Если T лексикографически больше S, то $e_S e_T = 0$.*

Доказательство леммы. Как и раньше, достаточно проверить, что можно найти два элемента a, b в одной строке T и в одном стоблце S. Пусть первая клетка, в которой отличаются S и T, встречается в k-м столбце и l-й строке, причём в таблице T в этой клетке стоит число t, а в таблице S — число s, $t > s$. Найдём число s в T; пусть оно стоит в u-м столбце и v-й строке. Ясно, что $v > l$ (раз мы рассматриваем первое расхождение), поэтому $u < k$ (в силу стандартности T). Рассмотрим число r на пересечении u-го столбца и l-й строки T. Числа r и s стоят в одной строке T и одном столбце S, что и требовалось. $\square$

Предположим, что сумма идеалов, отвечающих стандартным таблицам данной формы, не прямая. Пусть $\sum_T a_T e_T = 0$. Умножим это равенство слева на e_S для лексикографически наименьшей таблицы S данной формы с ненулевым коэффициентом a_S. Получим $a_S e_S^2 = 0$, т. е. $a_S = 0$. Противоречие.

Таким образом, представление $\mathbb{C}[S_n]e_T$ входит в групповую алгебру с кратностью как минимум число стандартных таблиц той же формы, что и T. Значит, и его размерность не меньше числа стандартных таблиц.

Лемма 5. *$\sum_\alpha N_\alpha^2 = n!$, где сумма ведётся по всем диаграммам Юнга, а N_α — число стандартных таблиц формы α.*

Доказательство леммы. Доказательство этого утверждения использует красивую комбинаторную конструкцию: алгоритм Робинсона–Шенстеда–Кнута, сопоставляющий перестановке чисел $1, \ldots, n$ пару стандартных таблиц Юнга одинаковой формы из n клеточек.

Будем читать нашу перестановку слева направо, корректируя таблицы. Инвариант: на l-м шаге есть две таблицы одинаковой формы, причем если занумеровать первые l чисел в перестановке в порядке возрастания числами от единицы до l, то алгоритм изготовит как раз имеющуюся у нас пару таблиц. Опишем способ найти в первой таблице место для очередного числа a_k (“процедура выпихивания” (bumping)). Если оно больше всех чисел первой строки таблицы, запишем его в конец этой строки. В противном случае найдем первое число a, которого оно меньше, запишем число a_k на его место и применим процедуру выпихивания к оставшейся части таблицы (без первой строки) для поиска места числу a.

Построение второй таблицы значительно проще. В каждую клеточку надо вписать номер шага, на котором она появилась.

Докажем, что любую пару стандартных таблиц одинаковой формы можно так получить. Для этого построим обратное отображение. По второй таблице найдём клеточку, которая появилась на последнем шаге. Если эта клеточка в первой строке, то соответствующее число a первой таблицы стояло в перестановке на последнем месте, и задача свелась к реконструкции перестановки меньшего множества. Если же эта клеточка не в первой строке, то соответствующее число a первой таблицы попало туда в результате выпихивания. Найдём в предыдущей строке первой таблицы самое правое число $b < a$, поставим на его место a и продолжим аналогичные действия в верхних строках, пока не дойдём до первой — тогда соответствующее число b' и будет искомым числом на последней позиции перестановки, и задача вновь сведена к задаче о перестановке меньшей длины. □

Из доказанного следует формула для размерности: сумма квадратов размерностей неприводимых представлений равна порядку группы, и мы доказали, что каждая из размерностей не меньше соответствующего числа стандартных таблиц, поэтому равенство может быть выполнено только если каждая размерность в действительности равна числу стандартных таблиц. □

Следующая теорема в содержательном отношении заменяет практически всё, что написано выше. Тем не менее мы привели и другое доказательство того, что конструкция Юнга даёт все неприводимые представления, ибо используемая в этом доказательстве техника довольно поучительна.

Теорема 1. *Конструкция Юнга строит по диаграмме именно то неприводимое представление, что было построено на предыдущей лекции.*

Доказательство. Действительно, заметим, что $\mathbb{C}[S_n]e_T = \mathbb{C}[S_n]r_Tc_T$, поэтому построенное представление является подпредставлением в $\mathbb{C}[S_n]c_T \simeq \mathrm{Ind}_{S_{\alpha'_1}\times\ldots\times S_{\alpha'_k}}^{S_n}(-1)$ и факторпредставлением представления $\mathbb{C}[S_n]r_T \simeq \mathrm{Ind}_{S_{\alpha_1}\times\ldots\times S_{\alpha_k}}^{S_n}(1)$ по ядру правого умножения на c_T. Значит, оно входит в каждое из этих представлений, что и требовалось. □

Модули Шпехта и правило ветвления

Приведём ещё одну конструкцию неприводимых представлений симметрической группы (модули Шпехта). Эта конструкция хороша тем, что позволяет явно указать базис в неприводимом представлении.

Введём на множестве таблиц Юнга формы α отношение эквивалентности: две таблицы эквивалентны, если числа в их соответствующих строчках совпадают с точностью до перестановки. Классы эквивалентности называют таблоидами формы α; класс таблицы T обозначают $[T]$. Заметим, что в пространстве с базисом из таблоидов и действием симметрической группы $\sigma[T] = [\sigma T]$, очевидно, реализуется индуцированное представление $\mathrm{Ind}_{S_{\alpha_1}\times\ldots\times S_{\alpha_k}}^{S_n}(1)$. Для каждой таблицы T определим вектор Шпехта

$v_T = c_T[T] \in T_\alpha$. Заметим, что $\sigma v_T = v_{\sigma T}$ для всех $\sigma \in S_n$. Определим модуль Шпехта S^α как подпространство в пространстве таблоидов, порождённое векторами v_T для всевозможных таблиц T формы α.

Предложение 5. *В модуле Шпехта S^α реализуется неприводимое представление, отвечающее диаграмме α.*

Доказательство. Заметим, что S^α — факторпредставление $\mathbb{C}[S_n]c_T \simeq \mathrm{Ind}^{S_n}_{S_{\alpha'_1}\times\ldots\times S_{\alpha'_k}}(-1)$ (по ядру отображения, которое переводит xc_T в $xc_T[T] = xv_T$), а также подпредставлением в $\mathbb{C}[S_n]r_T \simeq \mathrm{Ind}^{S_n}_{S_{\alpha_1}\times\ldots\times S_{\alpha_k}}(1)$. Поэтому он является их единственной общей неприводимой компонентой. $\square$

Рассмотрим отношение порядка на таблицах, получающееся при сравнении строк, являющихся результатами чтения таблицы снизу вверх, а в каждой строке — справа налево. Легко видеть, что для стандартной таблицы T и любого элемента $\sigma \in C(T)$ таблица σT меньше T в таком упорядочении (поскольку наибольший элемент, перемещаемый σ, перемещается вверх в силу стандартности T).

Предложение 6. *Векторы Шпехта, отвечающие стандартным таблицам формы α, образуют базис в S^α.*

Доказательство. Заметим, что в вектор Шпехта v_T входит с коэффициентом 1 таблоид $[T]$, а остальные таблоиды, входящие с ненулевыми коэффициентами, меньше $[T]$ в указанном смысле (если вместо таблоидов сравнивать их представителей — таблицы, в которых элементы каждой строки возрастают слева направо). Значит, векторы Шпехта, отвечающие стандартным таблицам, линейно независимы. Поскольку размерность модуля Шпехта S_α равна числу стандартных таблиц формы α, эти векторы образуют базис. $\square$

Следствие 1 (Правило ветвления). *Ограничим представление S^α на подгруппу S_{n-1}, оставляющую на месте n. Тогда это представление распадается в прямую сумму представлений, отвечающих диаграммам, получающимся из α выбрасыванием одной клетки (разумеется, нужно, чтобы после этого выбрасывания оставшиеся клеточки образовывали диаграмму).*

Доказательство. Поскольку количество стандартных таблиц формы α равно сумме количеств стандартных таблиц для указанных диаграмм (найдём в таблице число n и выбросим его — получится биекция), то достаточно проверить, что сумма указанных представлений входит в ограничение. Рассмотрим базис из векторов Шпехта, отвечающих стандартным таблицам формы α, и каждому такому вектору v_T поставим в соответствие вектор Шпехта, отвечающий таблице, полученной из T выбрасыванием n и забыванием соответствующей клеточки (этот вектор лежит в одном из рассматриваемых модулей). Очевидно, это (сюръективный) гомоморфизм представлений S_{n-1}, так что сумма указанных представлений входит в S^α, что и требовалось. $\square$