Задачи по представлениям групп к 12 сентября 2005

1. Пусть G — конечная группа, состоящая из элементов $g_1, \ldots, g_N$. Сопоставим каждому элементу g независимую переменную x_g и рассмотрим многочлен от этих переменных $D := \det\left(x_{g_i g_j}\right)_{i,j=1}^{N}$. Разложите его на неприводимые множители.
Указание: Пусть $\hat{G} = \{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ — множество всех неприводимых представлений G, а $\varepsilon(G)$ — знак перестановки $g \mapsto g^{-1}$. Тогда $D = \varepsilon(G) \prod_{\pi \in \hat{G}} \det\left(\sum_{g \in G} x_g \pi(g)\right)^{\deg \pi}$, причем многочлен $\det\left(\sum_{g \in G} x_g \pi(g)\right)$ уже неприводим.

2. a) Пусть X_1, X_2 — два множества с действием группы G, и $\mathbb{C}[X_1], \mathbb{C}[X_2]$ — представления G в соответствующих пространствах функций. Найдите размерность пространства сплетающих операторов $c(X_1, X_2) = \dim \mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}[X_1], \mathbb{C}[X_2])$.
Указание: Всякий оператор имеет вид $A : \; f(x_1) \mapsto h(x_2) := \sum_{x_1 \in X_1} a(x_1, x_2) f(x_1)$ для некоторой функции (“ядра”) a на $X_1 \times X_2$. Он является сплетающим если и только если $a(gx_1, gx_2) = a(x_1, x_2)$ для любого $g \in G$. Тем самым, $c(X_1, X_2)$ равно числу орбит G на $X_1 \times X_2$.
b) Пусть теперь X_1, X_2 — однородные пространства, т.е. $X_1 = G/H_1$, $X_2 = G/H_2$. Тогда $\mathbb{C}[X_i] = \mathrm{Ind}_{H_i}^{G} \mathbb{C}$. Докажите еще, что $c(X_1, X_2)$ равно числу орбит H_1 на G/H_2, а также числу двойных классов смежности $H_1 \backslash G / H_2$.
c) Пусть Reg — представление $G \times G$ в функциях на G, отвечающее действию $(g_1, g_2) : \; g \mapsto g_1 g g_2^{-1}$. Докажите, что $\dim \mathrm{Hom}_{G \times G}(\mathrm{Reg}, \mathrm{Reg})$ равно, с одной стороны, числу классов сопряженности в G, а с другой стороны, числу неприводимых представлений G.

3. Пусть даны разбиения $\alpha = (\alpha_1, \ldots)$, $\beta = (\beta_1, \ldots)$ числа n. Мы говорим, что $\alpha \geq \beta$, если $\forall\, m : \; \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \geq \sum_{j=1}^{m} \beta_j$. Проверьте, что если $n \leq 5$, то получается полный порядок на множестве разбиений n; и предъявите два несравнимых разбиения $n = 6$.

4. Сопоставим разбиению α множество C_α нильпотентных $n \times n$ матриц, которые в жордановой нормальной форме имеют блоки размеров $\alpha_1, \ldots$. В естественной топологии $\mathbb{C}^{n^2}$ это множество незамкнуто. Докажите, что его замыкание равно $\bigcup_{\beta \leq \alpha} C_\beta$.

5. Пусть α^* — двойственное разбиение (его диаграмма Юнга получается транспонированием из диаграммы Юнга α). Докажите, что $\alpha \geq \beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha^* \leq \beta^*$.
Указание: а) Проверьте, что α и γ являются ближайшими соседями (т.е. $\alpha > \gamma$, но не существует δ т.ч. $\alpha > \delta > \gamma$), только если диаграмма Юнга γ получается из диаграммы Юнга α перенесением

одной клеточки на ближайшее возможное место на юго-запад.
b) Проверьте, что если $\alpha > \gamma$ — ближайшие соседи, то $\alpha^* < \gamma^*$.

6. Докажите, что симметрическая группа S_5 изоморфна группе $PGL_2(\mathbb{F}_5)$ (т.е. факторгруппе обратимых 2×2 матриц по подгруппе скалярных матриц).
Указание: Используйте действие $PGL_2(\mathbb{F}_5)$ на $\mathbb{F}_5\mathbb{P}^1$ — множестве прямых в двумерном векторном пространстве над полем $\mathbb{F}_5$.

7. a) Опишите все 7 неприводимых представлений S_5.
Указание: Это тривиальное представление, обычное 4-мерное представление, его внешний квадрат; наконец, представление $PGL_2(\mathbb{F}_5)$ в функциях на $\mathbb{F}_5\mathbb{P}^1$ с нулевым интегралом; а также тензорное произведение этих представлений на знаковое.
b) Каким разбиениям отвечают эти представления?
c) Опишите все неприводимые представления S_3, S_4, а также разбиения, которые им отвечают.
Указание: S_3 является фактором S_4 по нормальной подгруппе Кляйна.
d) Докажите, что для произвольного n стандартное $n-1$-мерное представление S_n отвечает разбиению $(n-1, 1)$.