Задачи по представлениям групп к 7 ноября 2005

1. Пусть (V_1, Q_1), (V_2, Q_2) — векторные пространства над полем k характеристики $\neq 2$ с невырожденными квадратичными формами. Тогда их прямая сумма $V_1 \oplus V_2$ тоже снабжена невырожденной квадратичной формой $Q_1 \oplus Q_2$ (ортогональная прямая сумма). *Группой Витта* $Witt(\mathsf{k})$ поля k называется абелева группа с образующими, отвечающими классам изоморфизма пар (V, Q), и соотношениями $[V_1 \oplus V_2, Q_1 \oplus Q_2] = [V_1, Q_1] + [V_2, Q_2]$, а также $[\mathsf{k}^2, h] = 0$, где $h(x_1, x_2) = x_1 x_2$ — *гиперболическая форма.*
Вычислите $Witt(\mathbb{C})$ и $Witt(\mathbb{R})$.

2. a) Докажите, что в подходящем базисе k^n невырожденная квадратичная форма Q имеет вид $Q(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1^2 + \ldots + a_n x_n^2$.
b) Докажите, что если на каком-то векторе Q принимает значение $d \neq 0$, то в пункте a) можно добиться, чтобы $a_1 = d$.
c) Докажите, что если на каком-то ненулевом векторе Q принимает значение 0, то в пункте a) можно добиться, чтобы $a_1 = 1$, $a_2 = -1$.

3. Пусть $\mathsf{k} = \mathbb{F}_q$, а Q — невырожденная квадратичная форма на векторном пространстве V. Докажите, что
a) если $\dim V \geq 2$, а $d \neq 0$, то найдется $v \in V$ т.ч. $Q(v) = d$.
b) если $\dim V \geq 3$, то найдется $0 \neq v \in V$ т.ч. $Q(v) = 0$.

4. По-прежнему $\mathsf{k} = \mathbb{F}_q$. Пусть $\varepsilon \in \mathbb{F}_q$ — квадратичный невычет. Докажите, что невырожденная квадратичная форма на $\mathbb{F}_q^n$ изоморфна либо $x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + x_n^2$, либо $x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + \varepsilon x_n^2$.

5. Докажите, что группа Витта $Witt(\mathbb{F}_q)$ равна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, если $q = 1 \pmod 4$, или же равна $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, если $q = 3 \pmod 4$.

6. Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{F}_q$, а $V^\vee$ — двойственное векторное пространство. Фиксируем нетривиальный аддитивный характер $\psi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^*$. Для функции $f \in \mathbb{C}[V]$ определим *преобразование Фурье* $\hat{f} \in \mathbb{C}[V^\vee]$ следующим образом: $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\sharp V}^{-1} \sum_{v \in V} f(v) \psi\langle v, \xi\rangle$.
a) Докажите, что $\hat{\hat{f}}(v) = f(-v)$.
b) Докажите, что $\sum_{v \in V} |f(v)|^2 = \sum_{\xi \in V^\vee} |\hat{f}(\xi)|^2$ (*формула Планшереля*).
c) Пусть $T_v : \mathbb{C}[V] \to \mathbb{C}[V]$ — оператор сдвига $T_v f(w) = f(v + w)$. Докажите, что $\widehat{T_{-v} f}(\xi) = \psi\langle v, \xi\rangle \hat{f}(\xi)$ и $\widehat{\psi\langle ?, \xi\rangle f} = T_\xi \hat{f}$.

7. В обозначениях задачи 6 для невырожденной квадратичной формы Q на V рассмотрим функцию $\Phi_Q(v) = \psi(\frac{1}{2} Q(v))$. Заметим, что Q отождествляет V и $V^\vee$ (а именно, $v \mapsto \xi_v$, где $\xi_v(w) = B(v, w)$

— симметричная билинейная форма, продолжающая квадратичную форму Q, т.е. $B(v,w) := \frac{1}{2}(Q(v+w) - Q(v) - Q(w))$ — *поляризация* Q).

a) Докажите, что если $V = \mathbb{F}_q$ и $Q(x) = ax^2$, то $\widehat{\Phi_a} = \Gamma_a \Phi_{-a^{-1}}$, где Γ_a — константа, равная $\sqrt{q}^{-1} \sum_{y \in \mathbb{F}_q} \psi(\frac{a}{2} y^2)$.

b) Докажите, что $\Gamma_a \overline{\Gamma_a} = 1$ и $\Gamma_a \Gamma_{-a^{-1}} = 1 = \Gamma_a \Gamma_{-a}$.

c) Для произвольного V, обратив изоморфизм $Q: \ V \to V^\vee$, рассмотренный выше, получаем другой изоморфизм, который можно рассматривать опять как квадратичную форму Q^{-1} на $V^\vee$ (если Q имела вид $a_1 x_1^2 + \ldots + a_n x_n^2$, то Q^{-1} имеет вид $a_1^{-1} y_1^2 + \ldots + a_n^{-1} y_n^2$). Докажите, что $\widehat{\Phi_Q} = \Gamma_Q \Phi_{-Q^{-1}}$ для некоторой константы $\Gamma_Q \in \mathbb{C}^*$, причем $|\Gamma_Q| = 1$.

d) Докажите, что сопоставление $Q \mapsto \Gamma_Q$ продолжается до гомоморфизма $Witt(\mathbb{F}_q) \to \mathbb{C}^*$.

e)* Докажите, что $\Gamma_a \Gamma_b = \Gamma_1 \Gamma_{ab}$.