Задачи по представлениям групп к 14 ноября 2005

1. Цель следующих задач — описание представлений группы $SL(2,\mathbb{F}_q)$ для нечетного q. Для начала перечислим классы сопряженности. Есть два центральных класса, содержащих по одному элементу: $c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $c_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Есть два унипотентных класса, содержащих по $\frac{q^2-1}{2}$ элементов: $c_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $c_4 = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где ε — квадратичный невычет. И еще два противоположных класса, тоже содержащих по $\frac{q^2-1}{2}$ элементов: $c_5 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $c_6 = \begin{pmatrix} -1 & -\varepsilon \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Есть $\frac{q-3}{2}$ гиперболических классов вида $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$, содержащих по $q(q+1)$ элементов. Здесь $x \neq \pm 1$, и классы, отвечающие x и x^{-1}, совпадают. Наконец, есть $\frac{q-1}{2}$ эллиптических классов вида α, содержащих по $q(q-1)$ элементов. Здесь $\pm 1 \neq \alpha \in \mathbb{F}^*_{q^2}$, $N(\alpha) = \alpha \cdot \bar{\alpha} = \alpha^{q+1} = 1$, и классы, отвечающие α и $\alpha^{-1} = \bar{\alpha} = \alpha^q$, совпадают. Таким образом, всего имеется $q+4$ класса. Докажите.

2. Все одномерные представления $GL(2,\mathbb{F}_q)$ при ограничении на $SL(2,\mathbb{F}_q)$ дают одно и то же тривиальное представление. Докажите, что и все представления Стейнберга $GL(2,\mathbb{F}_q)$ при ограничении на $SL(2,\mathbb{F}_q)$ дают одно и то же неприводимое представление St.

3. Докажите, что если $\mu \in \widehat{\mathbb{F}^*_q}$ и $\mu^2 \neq 1$, то ограничение представления основной серии $V_{(\mu,1)}$ с $GL(2,\mathbb{F}_q)$ на $SL(2,\mathbb{F}_q)$ неприводимо, и эти ограничения неизоморфны тогда и только тогда, когда $\mu \neq \nu \neq \mu^{-1}$. Таким образом, получается $\frac{q-3}{2}$ неприводимых представлений $V_{(\mu,1)}$ размерности $q+1$.

4. Пусть W — двумерное векторное пространство над $\mathbb{F}_q$ с симплектической формой $\langle , \rangle$, так что $SL(2,\mathbb{F}_q)$ — это группа преобразований W, сохраняющих симплектическую форму.
a) Докажите, что $V_{(\mu,1)}$ реализуется в пространстве функций на $W - \{0\}$ т.ч. $f(av) = \mu(a)f(v)$ (здесь $a \in \mathbb{F}^*_q$).
b) Рассмотрим *преобразование Радона* $\mathrm{RT}f(v) := \sum_{\langle w,v\rangle=1} f(w)$ из $\mathbb{C}[W - \{0\}]$ в себя. Докажите, что это сплетающий оператор, и что $\mathrm{RT}(V_{(\mu,1)}) = V_{(\mu^{-1},1)}$.
c) Пусть $\theta \in \widehat{\mathbb{F}^*_q}$ — нетривиальный характер, такой что $\theta^2 = 1$. Тогда RT является сплетающим автоморфизмом $V_{(\theta,1)}$. Докажите,

что $\mathrm{Tr}(\mathrm{RT}) = 0$ и $\mathrm{RT}^2 = \theta(-1)q$ (умножение на скаляр). Таким образом, собственные подпространства $V_{(\theta,1)}$, отвечающие собственным значениям RT, равным $\pm\sqrt{\theta(-1)q}$, являются $SL(2,\mathbb{F}_q)$-подпредставлениями $V^{\pm}_{(\theta,1)}$ размерности $\frac{q+1}{2}$.
d) Докажите, что оба представления из пункта c) неприводимы и неизоморфны.

5. a) Пусть $\mathcal{S}_q \subset \mathbb{F}^*_{q^2}$ — единичная окружность, т.е. подгруппа элементов α таких, что $\alpha \cdot \bar{\alpha} = 1$. Докажите, что ограничение представления дискретной серии ρ_μ (здесь $\mu \in \widehat{\mathbb{F}^*_{q^2}}$) с $GL(2,\mathbb{F}_q)$ на $SL(2,\mathbb{F}_q)$ зависит лишь от ограничения $\mu|_{\mathcal{S}_q}$.
b) Докажите, что такие ограничения неизоморфны тогда и только тогда, когда $\mu|_{\mathcal{S}_q} \neq \nu|_{\mathcal{S}_q} \neq \mu^{-1}|_{\mathcal{S}_q}$ и неприводимы тогда и только тогда, когда $\mu^2|_{\mathcal{S}_q} \neq 1$. Таким образом, получается $\frac{q-1}{2}$ неприводимых представлений ρ_μ размерности $q-1$.
c) Пусть $\tau \in \widehat{\mathcal{S}}_q$ — нетривиальный характер, такой что $\tau^2 = 1$ (а также какое-нибудь его продолжение на $\mathbb{F}^*_{q^2}$). Докажите, что ограничение представления дискретной серии ρ_τ с $GL(2,\mathbb{F}_q)$ на $SL(2,\mathbb{F}_q)$ распадается в сумму двух неизоморфных неприводимых представлений $\rho^{\pm}_\tau$ размерности $\frac{q-1}{2}$. Тем самым, описаны все неприводимые представления $SL(2,\mathbb{F}_q)$.

6. Теперь опишем характеры $\chi^{\pm}_\theta$ и $\chi^{\pm}_\tau$ представлений $V^{\pm}_{(\theta,1)}$ и $\rho^{\pm}_\tau$.
a) Докажите, что значение этих характеров на гиперболических и эллиптических классах равно половине значений характеров $V_{(\theta,1)}$ и ρ_τ.
b) Докажите, что значения $\chi^{\pm}_\theta$ (соотв. $\chi^{\pm}_\tau$) на классах c_3 и c_5, а также c_4 и c_6, отличаются умножением на $\theta(-1)$ (соотв. $\tau(-1)$).
c) Докажите, что $\chi^{\pm}_\theta(c_3) = \chi^{\mp}_\theta(c_4)$ и $\chi^{\pm}_\tau(c_3) = \chi^{\mp}_\tau(c_4)$.
d) Докажите, что $\chi^{\pm}_\theta(c_3) = \frac{1\pm\sqrt{\theta(-1)q}}{2}$ и $\chi^{\pm}_\theta(c_4) = \frac{1\mp\sqrt{\theta(-1)q}}{2}$, а $\chi^{\pm}_\tau(c_3) = \frac{-1\pm\sqrt{\theta(-1)q}}{2}$ и $\chi^{\pm}_\tau(c_4) = \frac{-1\mp\sqrt{\theta(-1)q}}{2}$.