Задачи по представлениям групп к 5 декабря 2005

1. Цель следующих задач — изучить некоторые примеры подгрупп $SL(2,\mathbb{C})$ и их представления.

a) Пусть τ — нетривиальный характер единичной окружности $\mathcal{S}_5 \subset \mathbb{F}_{25}^*$, такой что $\tau^2 = 1$. Пусть ρ_τ^+ — неприводимое 2-мерное представление $SL(2,\mathbb{F}_5)$ (обозначения задачи 5c) к 14 ноября). Докажите, что ρ_τ^+ точно и его образ содержится в $SL(2,\mathbb{C})$. Таким образом, получаем вложение $\rho_\tau^+ : \ SL(2,\mathbb{F}_5) \hookrightarrow SL(2,\mathbb{C})$. Напомним, к слову, что фактор $SL(2,\mathbb{F}_5)$ по центру (скалярным матрицам), $PSL(2,\mathbb{F}_5)$, изоморфен знакопеременной группе $\mathfrak{A}_5$.

b) Пусть μ — характер единичной окружности $\mathcal{S}_3 \subset \mathbb{F}_9^*$, такой что $\mu^2 \neq 1$. Пусть ρ_μ — 2-мерное представление дискретной серии $SL(2,\mathbb{F}_3)$ (см. задачу 5b) к 14 ноября). Докажите, что ρ_μ точно и его образ содержится в $SL(2,\mathbb{C})$. Таким образом, получаем вложение $\rho_\mu : \ SL(2,\mathbb{F}_3) \hookrightarrow SL(2,\mathbb{C})$. Напомним, к слову, что фактор $SL(2,\mathbb{F}_3)$ по центру (скалярным матрицам), $PSL(2,\mathbb{F}_3)$, изоморфен знакопеременной группе $\mathfrak{A}_4$.

c) Пусть $\alpha \in SL(2,\mathbb{F}_3)$ — эллиптический элемент (они все сопряжены), и $\zeta \in SL(2,\mathbb{C})$ — квадратный корень из $\rho_\mu(\alpha)$. Докажите, что $\zeta\,\{\rho_\mu(SL(2,\mathbb{F}_3))\}\,\zeta^{-1} = \rho_\mu(SL(2,\mathbb{F}_3))$, и таким образом, подгруппа $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$, порожденная $\rho_\mu(SL(2,\mathbb{F}_3)$ и ζ, имеет порядок 48. К слову, фактор Γ по центру (скалярным матрицам $\pm\,\mathrm{Id}$), $\overline{\Gamma}$, изоморфен симметрической группе S_4.

2. Из задач к 14 ноября мы знаем, что у группы $SL(2,\mathbb{F}_3)$ есть 7 неприводимых представлений $\mathbb{C}, St, V_{(\theta,1)}^+, V_{(\theta,1)}^-, \rho_\tau^+, \rho_\tau^-, \rho_\mu$, размерности которых равны, соответственно, $1,3,2,2,1,1,2$. Поставим эти представления в вершины графа и соединим V_1 и V_2 ребром, если V_2 входит в $\rho_\mu \otimes V_1$. Проверьте, что получится следующий граф:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathbb{C} & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & \rho_\mu & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
\rho_\tau^+ & = & V_{(\theta,1)}^+ & = & St & = & V_{(\theta,1)}^- & = & \rho_\tau^-
\end{array}$$

3. a) Выведите из задачи 1 к 21 ноября следующую классификацию неприводимых представлений группы Γ. Обозначим для

краткости нормальную подгруппу $\rho_\mu(SL(2,\mathbb{F}_3)) \subset \Gamma$ индекса 2 через $H \subset \Gamma$. Тогда $\mathrm{Ind}_H^\Gamma(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \oplus \theta$, где θ — (одномерный нетривиальный) характер Γ. Далее, $\mathrm{Ind}_H^\Gamma(\rho_\tau^+) = \mathrm{Ind}_H^\Gamma(\rho_\tau^-) =: \rho \simeq \rho \otimes \theta$ — двумерное неприводимое представление. Далее, $\mathrm{Ind}_H^\Gamma(\rho_\mu) = \pi \oplus \pi_\theta$, где π — тавтологическое представление Γ (т.е. вышеописанное вложение в $SL(2,\mathbb{C})$), а $\pi_\theta = \pi \otimes \theta$. Далее, $\mathrm{Ind}_H^\Gamma(St) = \sigma \oplus \sigma_\theta$, где σ — 3-мерное неприводимое представление Γ, а $\sigma_\theta = \sigma \otimes \theta$. Наконец, $\mathrm{Ind}_H^\Gamma(V^+_{(\theta,1)}) = \mathrm{Ind}_H^\Gamma(V^-_{(\theta,1)}) =: V \simeq V \otimes \theta$ — 4-мерное неприводимое представление. Итак, имеется 8 неприводимых представлений.
b) Поставим эти представления в вершины графа и соединим V_1 и V_2 ребром, если V_2 входит в $\pi \otimes V_1$. Проверьте, что получится следующий граф:

$$\begin{tikzcd}
 & & & \rho \arrow[d, equal] & & & \\
\theta \arrow[r, equal] & \pi_\theta \arrow[r, equal] & \sigma_\theta \arrow[r, equal] & V \arrow[r, equal] & \sigma \arrow[r, equal] & \pi \arrow[r, equal] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

4. Из задач к 14 ноября мы знаем, что у группы $SL(2,\mathbb{F}_5)$ есть 9 неприводимых представлений $\mathbb{C}, St, V_{(\kappa,1)}, V^+_{(\theta,1)}, V^-_{(\theta,1)}, \rho_\mu, \rho_\nu, \rho_\tau^+, \rho_\tau^-$ размерностей $1, 5, 6, 3, 3, 4, 4, 2, 2$ (обозначения говорят сами за себя). Поставим эти представления в вершины графа и соединим V_1 и V_2 ребром, если V_2 входит в $\rho_\tau^+ \otimes V_1$. Проверьте, что получится следующий граф:

$$\begin{tikzcd}
 & & V^-_{(\theta,1)} \arrow[d, equal] & & & & & \\
\rho_\tau^- \arrow[r, equal] & \rho_\nu \arrow[r, equal] & V_{(\kappa,1)} \arrow[r, equal] & St \arrow[r, equal] & \rho_\mu \arrow[r, equal] & V^+_{(\theta,1)} \arrow[r, equal] & \rho_\tau^+ \arrow[r, equal] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$