Задачи по представлениям групп к 19 сентября 2005

1. Пусть α — разбиение $(k, n-k)$. Соответствующее индуцированное представление S_n будем для краткости обозначать T_k, а его неприводимое подпредставление — U_k. Таким образом, T_k — представление в функциях на X_k — множестве k-элементных подмножеств $\{1, \dots, n\}$. Докажите, что $T_k \simeq T_{n-k}$, и если $k \leq n/2$, то $T_k \simeq U_0 \oplus U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$.

2. Пусть $\delta_B \in \mathbb{C}[X_k]$ — характеристическая функция подмножества $B \in X_k$. Определим эндоморфизм ψ_k пространства T_k следующим образом: $\psi_k(\delta_B) = \sum_{x \notin B}^{y \in B} \delta_{(B-\{y\}) \cup \{x\}}$. Проверьте, что это сплетающий оператор, найдите его собственные значения, и докажите, что его собственные подпространства изоморфны U_i.

3. Введем $\phi_k \in \mathrm{Hom}(T_k, T_{k+1})$ и $\phi_k^* \in \mathrm{Hom}(T_{k+1}, T_k)$ так: $\phi_k(\delta_B) = \sum_{x \notin B} \delta_{B \cup \{x\}}$; $\phi_k^*(\delta_B) = \sum_{y \in B} \delta_{B-\{y\}}$. Введем $T = \oplus_k T_k$, $\phi = \oplus_k \phi_k$, $\phi^* = \oplus_k \phi_k^*$, $\psi = \oplus_k \psi_k$, и наконец, оператор $H|_{T_k} = 2k - n$.
a) Проверьте, что коммутаторы $[H, \phi] = 2\phi$, $[H, \phi^*] = -2\phi^*$, $[\phi, \phi^*] = H$.
b) Проверьте, что T изоморфно $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ с естественным действием S_n (перестановками сомножителей).
c) Выразите “оператор Казимира” $C = \phi^*\phi + \frac{H(H+2)}{4}$ через ψ.

4. a) Докажите, что ϕ_k инъективен при $k < \frac{n}{2}$ и сюръективен при $k > \frac{n}{2} - 1$.
b) Докажите, что при $k < \frac{n}{2}$ ядро $\mathrm{Ker}\phi_k^* \subset T_{k+1}$ изоморфно U_{k+1}.

5. Пусть $n = 2k$, так что $T_k = U_0 \oplus U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$. Рассмотрим инволюцию $\sigma \in \mathrm{Hom}_{S_n}(T_k, T_k)$, заданную как $\sigma f(B) = f(\{1, \dots, n\} - B)$. Тогда $\sigma|_{U_i} = \pm 1$. Найдите этот знак в зависимости от i.

6. a) Разложите на неприводимые представления $\mathrm{Ind}_{S_3}^{S_4} \pi$, где π — (каждое из трех) неприводимое представление S_3.
b) Пусть Z_4 — подгруппа S_4, порожденная 4-циклом σ, а ρ — ее характер (одномерное представление), $\rho(\sigma) = \sqrt{-1}$. Разложите на неприводимые представления $\mathrm{Ind}_{Z_4}^{S_4} \rho$.

7. Пусть Z_n — подгруппа S_n, порожденная n-циклом σ, а ρ — ее характер, $\rho(\sigma) = \sqrt[n]{1}$ (примитивный корень). Найдите кратность неприводимого представления π в $\mathrm{Ind}_{Z_n}^{S_n} \rho$, где π — это
a) Знаковое представление sgn;
b) $n-1$-мерное представление (отвечающее разбиению $(n-1, 1)$).

8. Пусть $U_{(n-1,1)}$ — стандартное $n-1$-мерное представление S_n. Докажите, что внешняя степень $\Lambda^k U_{(n-1,1)}$ — это неприводимое представление S_n, отвечающее разбиению $(n-k, 1, \dots, 1)$ (k единиц).