Задачи по представлениям групп к 26 сентября 2005

1. Разложите на неприводимые $\mathrm{Ind}_{S_3\times S_2}^{S_5}\mathrm{sgn}\otimes\mathrm{sgn}$.

2. (a) Проверьте, что все подгруппы порядка 8 в S_4 изоморфны.

(b) Разложите на неприводимые $\mathrm{Ind}_H^{S_4}(1)$, где $H\subset S_4$ — подгруппа порядка 8.

(c)* Пусть $\sigma\subset S_{2n}$ — перестановка с цикловым типом $(2,2,\ldots,2)$, а B_n — её централизатор в S_{2n}. Разложите на неприводимые $\mathrm{Ind}_{B_n}^{S_{2n}}(1)$.

3. Пусть Z_n — подгруппа S_n, порожденная n-циклом σ, а ρ — ее характер, $\rho(\sigma)=\sqrt[n]{1}$ (примитивный корень). Докажите, что кратность представления U_α в $\mathrm{Ind}_{Z_n}^{S_n}\rho$ равна

$$\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu(d)\chi_\alpha(\sigma^{n/d}),$$

где $\mu(d)$ — функция Мёбиуса, $\mu(1)=1$, $\mu(d)=(-1)^s$, если d есть произведение s различных простых чисел, и $\mu(d)=0$ в остальных случаях.

4. (a) Рассмотрим неприводимое представление U_α группы S_n, отвечающее разбиению α. Вложим S_n в S_{n+1} как подгруппу, сохраняющую $n+1$. Разложите на неприводимые представление $\mathrm{Ind}_{S_n}^{S_{n+1}}U_\alpha$.

(b) Попробуйте придумать непосредственное комбинаторное доказательство равенства

$$(|\alpha|+1)N_\alpha=\sum_\beta N_\beta,$$

где сумма ведётся по всем диаграммам β, получающимся из α добавлением одной клеточки, а N_β — число стандартных таблиц формы β.

5. (a) Докажите, что левые идеалы в $\mathbb{C}[S_n]$, порождённые элементами r_Tc_T и c_Tr_T, являются изоморфными представлениями S_n.

(b) Верно ли это утверждение, если заменить $\mathbb{C}$ на конечное поле?

6. (a) Обозначим через $RSK(\sigma)$ пару стандартных таблиц, отвечающих перестановке σ при соответствии Робинсона–Шёнстеда–Кнута. Докажите, что если $RSK(\sigma)=(S,T)$, то $RSK(\sigma^{-1})=(T,S)$.

(b) Выведите из доказанного в пункте (a), что общее число стандартных таблиц из n клеточек равно числу инволюций (элементов g с $g^2=e$) в S_n.

(c) Пусть инволюции g отвечает пара (T,T). Как по таблице T быстро вычислить число неподвижных точек у g?

7. Пусть $RSK(\sigma) = (S,T)$. Как по форме таблиц S,T быстро вычислить длину наибольшей возрастающей подпоследовательности перестановки σ? Длину наибольшей убывающей подпоследовательности?

8. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ — разбиение числа n. Рассмотрим в кольце многочленов от n переменных подпространство, натянутое на орбиту элемента

$$V(x_1, \ldots, x_{\alpha_1}) V(x_{\alpha_1+1}, \ldots, x_{\alpha_1+\alpha_2}) \ldots V(x_{\alpha_1+\ldots+\alpha_{k-1}}, \ldots, x_n)$$

($V(x_1, \ldots, x_k)$ — определитель Вандермонда) под действием S_n. Докажите, что в этом подпространстве реализуется неприводимое представление, изоморфное U_α.