Задачи по представлениям групп к 3 октября 2005

1. Пусть H — подгруппа G, и W — ее представление с характером χ, а $V = \operatorname{Ind}_H^G W$ имеет характер ψ.
a) Докажите, что $\psi(x) = (\sharp H)^{-1} \sum_{g\in G:\ g^{-1}xg\in H} \chi(g^{-1}xg)$.
b) Пусть ϕ — произвольный характер G, и $\operatorname{Res}_G^H \phi$ — его ограничение на H. Докажите, что скалярные произведения $\langle \phi, \psi\rangle_G$ и $\langle \operatorname{Res}_G^H \phi, \chi\rangle_H$ равны (формула взаимности Фробениуса).

2. Пусть ψ_α — характер индуцированного представления T_α симметрической группы S_n. Пусть ν — другое разбиение n, и C_ν — соответствующий класс сопряженности в S_n (перестановки, у которых n_1 циклов длины 1, n_2 циклов длины 2 и т.д.).
a) Проверьте, что $\sharp C_\nu = \frac{n!}{1^{n_1} n_1! \cdot 2^{n_2} n_2! \cdots}$.
b) Вычислите значение характера ψ_α на классе сопряженности $C_\nu:\ \psi_\alpha(C_\nu) = (\sharp C_\nu)^{-1}[S_n : S_\alpha] \cdot \sharp(C_\nu \cap S_\alpha) = \frac{1^{n_1} n_1! \cdot 2^{n_2} n_2! \cdots}{n!} \cdot \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_k!} \cdot \sum \prod_{p=1}^k \frac{\alpha_p!}{1^{r_{p1}} r_{p1}! \cdots n^{r_{pn}} r_{pn}!} = \sum \prod_{q=1}^n \frac{n_q!}{r_{1q}! \cdot r_{2q}! \cdots r_{kq}!}$, где суммирование ведется по всем наборам натуральных чисел $\{r_{pq}, 1 \le p \le k, 1 \le q \le n\}$ таких, что $n_q = r_{1q} + r_{2q} + \ldots + r_{kq}$ и $\alpha_p = r_{p1} + 2r_{p2} + \ldots + nr_{pn}$.
c) Докажите, что $\psi_\alpha(C_\nu)$ равно коэффициенту при мономе $X^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}$ в симметрическом многочлене степенных сумм $p_\nu = (x_1 + \ldots + x_k)^{n_1} \cdot (x_1^2 + \ldots + x_k^2)^{n_2} \cdots$.

3. Выведите из формулы Фробениуса для характеров S_n следующие формулы для размерности U_α:
a) $\dim U_\alpha = \frac{n!}{a_1! \cdots a_k!} \prod_{i<j}(a_i - a_j)$, где $a_i = \alpha_i + k - i$ (а k, как и в предыдущей задаче, обозначает число слагаемых разбиения α).
b) Формула крюков: $\dim U_\alpha = n! / \prod_{x\in\alpha} h(x)$, где x — клеточки диаграммы Юнга разбиения α, а $h(x)$ — длина крюка, т.е. 1+ число клеточек строго справа от x+ число клеточек строго снизу от x.

4. Выведите из формулы крюков, что все неприводимые представления S_n имеют размерность по крайней мере n, за исключением следующих случаев: тривиальное, знаковое, $U_{(n-1,1)}$, $U_{(2,1,\ldots,1)}$, $U_{(2,2)}$ (у группы S_4) и, наконец, $U_{(3,3)}$, $U_{(2,2,2)}$ (у группы S_6).

5. Выведите из формулы Фробениуса для характера χ_α неприводимого представления U_α, что
a) $\chi_{(n-1,1)}(C_\nu) = n_1 - 1$;
b) $\chi_{(n-2,1,1)}(C_\nu) = \frac{1}{2}(n_1 - 1)(n_1 - 2) - n_2$;
c) $\chi_{(n-2,2)}(C_\nu) = \frac{1}{2}(n_1 - 1)(n_1 - 2) + n_2 - 1$.
(Обозначения для класса сопряженности такие же, как в задаче 2.) Можете продолжить этот список?

6. Пусть g — цикл длины n в S_n. Докажите, что $\chi_\alpha(g) = (-1)^s$, если $\alpha = (n-s, 1, \ldots, 1)$, $0 \leq s \leq n-1$, и $\chi_\alpha(g) = 0$ иначе.

7. Пусть α симметрично, т.е. $\alpha^* = \alpha$, и пусть $q_1 > q_2 > \ldots > q_r > 0$ — длины симметричных крюков, составляющих диаграмму Юнга α, т.е. $q_1 = 2\alpha_1 - 1$, $q_2 = 2\alpha_2 - 3, \ldots$ Докажите, что если g — произведение циклов длин $q_1, q_2, \ldots, q_r$, то $\chi_\alpha(g) = (-1)^{(n-r)/2}$.

8. Докажите, что $U_{(n-1,1)} \otimes U_{(n-1,1)} = \mathbb{C} \oplus U_{(n-1,1)} \oplus U_{(n-2,2)} \oplus U_{(n-2,1,1)}$.

9. Докажите следующий вариант формулы Фробениуса: значение неприводимого характера на классе сопряженности (обозначения из задач к 3 октября) $\chi_\alpha(C_\nu)$ равно коэффициенту при $x_1^{\alpha_1+k-1} x_2^{\alpha_2+k-2} \ldots x_k^{\alpha_k}$ в многочлене $\Delta(x)p_\nu$, где $\Delta(x) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$ — определитель Вандермонда.