Задачи по представлениям групп к 17 октября 2005

1. Цель задач 1–4 — доказательство *взаимности И. Шура-Г. Вейля*: пусть V — векторное пространство размерности d; тогда в $V^{\otimes n}$ действует группа $GL_d \times S_n$ (т.е. действуют, перестановочно друг с другом, GL_d "диагонально" и S_n перестановками сомножителей). Утверждается, что как $GL_d \times S_n$-модуль, $V^{\otimes n}$ является прямой суммой неприводимых представлений вида $V_\lambda \boxtimes U_\lambda$ (с кратностью 1), где у λ не больше d строк. Более того, для различных n и λ неприводимые GL_d-представления V_λ все различны и исчерпывают все *полиномиальные* неприводимые представления GL_d (т.е. такие представления $\rho : GL_d \to GL_N$, у которых матричные коэффициенты $\rho(A)$ полиномиально зависят от матричных коэффициентов A).

Для начала разложим $V^{\otimes n}$ как S_n-модуль, и определим V_λ как кратность вхождения неприводимого представления U_λ (т.е. $V_\lambda = \mathbb{C}^{r_\lambda}$, где r_λ — кратность. Или еще $V_\lambda = \mathrm{Hom}_{S_n}(U_\lambda, V^{\otimes n})$). По аналогии с групповой алгеброй, определим ассоциативную алгебру $\mathcal{A}$ как линейную оболочку в $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ операторов вида $A \otimes \ldots \otimes A,\ A \in GL(V)$. Докажите, что $\mathcal{A} = \mathrm{Sym}^n(\mathrm{End}(V)) = \bigoplus_\lambda \mathrm{End}(V_\lambda)$.

2. Докажите следующую лемму: пусть $\mathfrak{A}$ — ассоциативная алгебра, и $\{V_i\}_{i\in I}$ — некоторый набор ее конечномерных представлений. Получается отображение $\mathfrak{A} \to \bigoplus_{i\in I} \mathrm{End}(V_i)$. Это отображение сюръективно тогда и только тогда, когда все V_i неприводимы и попарно неизоморфны.

3. Из задач 2 и 3 уже следует, что все GL_d-представления V_λ неприводимы и попарно неизоморфны. Выберем таблицу D формы λ, и пусть $e_D \in \mathbb{C}[S_n]$ — соответствующий симметризатор Юнга. Докажите, что $V_\lambda \simeq e_D \cdot V^{\otimes n}$.

4. Теперь надо проверить, что $V_\lambda \neq 0$ тогда и только тогда, когда у λ не больше d строк. Пусть число строк λ равно $k \le d$. Выберем базис $v_1, \ldots, v_d$ в V и рассмотрим тензор $v := v_1^{\otimes \lambda_1} \otimes \ldots \otimes v_k^{\otimes \lambda_k}$.
a) Докажите, что линейная оболочка $\langle \sigma v,\ \sigma \in S_n \rangle$ как S_n-модуль изоморфна T_λ. Поскольку U_λ содержится в T_λ, заключаем, что $V_\lambda \neq 0$.
b) Докажите, что как S_n-модуль $V^{\otimes n} \simeq \oplus_\mu T_\mu^{c_\mu}$, где c_μ — некоторые (ненулевые) кратности, а сумма берется по диаграммам μ, у которых не больше d строк. Отсюда заключаем, что в S_n-модуль $V^{\otimes n}$ входят только такие U_λ, у которых $\lambda \ge \mu$ для некоторого μ из предыдущей суммы.
c) Докажите, что если $\lambda \ge \mu$, то число строк λ не больше числа строк μ.

5. Пример: докажите, что $V_{(2,1)} \simeq \frac{(\mathrm{Sym}^2 V)\otimes V}{\mathrm{Sym}^3 V} \simeq \frac{(\Lambda^2 V)\otimes V}{\Lambda^3 V}$.

6. Докажите, что если $n \le d$, то $\mathrm{End}_{GL_d}(V^{\otimes n}) \simeq \mathbb{C}[S_n]$.

7. Помимо группы GL_d, в $V^{\otimes n}$ действует *алгебра Ли* $\mathfrak{gl}_d$, то есть (не обязательно обратимые) $d \times d$-матрицы с операцией коммутатора $[A,B] := AB - BA$, по формуле

$$A(w_1 \otimes \ldots \otimes w_n) := Aw_1 \otimes w_2 \otimes \ldots \otimes w_n + \ldots + w_1 \otimes \ldots \otimes w_{n-1} \otimes Aw_n.$$

Проверьте, что в случае $d = 2$ это действие совпадает с действием из задачи 3 к 19 сентября в обозначениях $\phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\phi^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

8. *Характер* полиномиального представления $\rho : GL_d \to GL_N$ — это функция χ_ρ на GL_d со значениями $\chi_\rho(A) := \mathrm{Tr}(\rho(A))$.

a) Докажите, что $\chi_\rho(A)$ зависит лишь от собственных значений $x_1, \ldots, x_d$ матрицы A и является симметрической функцией переменных $x_1, \ldots, x_d$.

b)* Попробуйте вывести из соответствия Шура-Вейля и формулы Фробениуса, что характер χ_λ представления V_λ задается функцией Шура s_λ от переменных $x_1, \ldots, x_d$. Для начала надо понять, в какую операцию над представлениями GL_d переводит соответствие Шура-Вейля умножение Литтлвуда-Ричардсона.