Задачи по представлениям групп к 12 декабря 2005

1. Цель следующих задач — обсуждение задачи 8b) к 17 октября. Напомним, что мы хотим вычислить характер χ_λ представления V_λ группы $GL_d = GL(V)$.
a) Пусть $\lambda = (n)$, т.е. $V_\lambda = \operatorname{Sym}^n V$. Докажите, что $\chi_{(n)} = h_n(x_1, \ldots, x_d)$ (полная симметрическая функция).
b) Пусть $\lambda = (1, \ldots, 1)$, т.е. $V_\lambda = \Lambda^n V$. Докажите, что $\chi_{(1,\ldots,1)} = e_n(x_1, \ldots, x_d)$ (элементарная симметрическая функция).

2. Пусть U — произвольное представление симметрической группы S_n. Положим $\mathbb{S}_U(V) = \operatorname{Hom}_{S_n}(U, V^{\otimes n})$ (*полиномиальный функтор*). Например, $\mathbb{S}_{U_\lambda}(V) = V_\lambda$. Пусть U' (соотв. U'') — представление S_n (соотв. S_m). Докажите, что $\mathbb{S}_{U'}(V) \otimes \mathbb{S}_{U''}(V) = \mathbb{S}_{U' \star U''}(V)$, где $U' \star U'' = \operatorname{Ind}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}}(U' \boxtimes U'')$ — произведение Литтлвуда-Ричардсона.

3. Теперь выведите из задач 1,2 утверждение задачи 8b) к 17 октября, а также докажите, что $\dim V_\lambda = \prod_{1 \le i < j \le d} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i} = \prod \frac{d - i + j}{h_{ij}}$. Второе произведение берется по всем клеткам с координатами (i, j) диаграммы Юнга λ, а h_{ij} — длина крюка клетки с координатами (i, j).

4. Пусть $N_{\lambda\mu}^{\nu}$ — структурные константы умножения Литтлвуда-Ричардсона, т.е. $U_\lambda \star U_\mu = \oplus_\nu U_\nu^{N_{\lambda\mu}^{\nu}}$. Пусть $C_{\lambda\mu}^{\nu}$ — структурные константы (внутреннего) тензорного умножения, т.е. $U_\lambda \otimes U_\mu = \oplus_\nu U_\nu^{C_{\lambda\mu}^{\nu}}$.
a) Докажите, что $C_{\lambda\mu}^{(n)} = 1$, если $\mu = \lambda$, и 0 иначе; $C_{\lambda\mu}^{(1,\ldots,1)} = 1$, если $\mu = \lambda^*$ (транспонированная диаграмма Юнга), и 0 иначе.
b) Докажите, что $\mathbb{S}_{U_\nu}(V \oplus W) = \oplus (V_\lambda \otimes W_\mu)^{N_{\lambda\mu}^{\nu}}$; в частности, $\operatorname{Sym}^n(V \oplus W) = \bigoplus_{a+b=n} (\operatorname{Sym}^a V \otimes \operatorname{Sym}^b W)$ и
$\Lambda^n(V \oplus W) = \bigoplus_{a+b=n} (\Lambda^a V \otimes \Lambda^b W)$.
c) Докажите, что $\mathbb{S}_{U_\nu}(V \otimes W) = \oplus (V_\lambda \otimes W_\mu)^{C_{\lambda\mu}^{\nu}}$; в частности, $\operatorname{Sym}^n(V \otimes W) = \bigoplus V_\lambda \otimes W_\lambda$ (сумма по всем разбиениям n, у которых не больше $\dim V$ и $\dim W$ членов); $\Lambda^n(V \otimes W) = \bigoplus V_\lambda \otimes W_{\lambda^*}$ (сумма по всем разбиениям n, у которых не больше $\dim V$ членов, и первый член не больше $\dim W$).

5. a) Пусть дано разбиение $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$. Докажите, что $\det\left(x_j^{\lambda_i}\right) \cdot \prod_{j=1}^{r} (1 - x_j)^{-1} = \sum \det\left(x_j^{\nu_i}\right)$, где сумма берется по всем разбиениям $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_r)$, таким что $\nu_1 \ge \lambda_1 > \nu_2 \ge \lambda_2 > \ldots > \nu_r \ge \lambda_r$.
b) Докажите *формулу Пьери* для умножения функций Шура: $s_\lambda s_{(m)} = \sum s_\nu$, где сумма берется по всем разбиениям $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{r+1})$, таким что $\nu_1 \ge \lambda_1 \ge \nu_2 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \nu_r \ge \lambda_r \ge \nu_{r+1} \ge 0$ и $\sum \nu_j = m + \sum \lambda_j$, т.е. по всем диаграммам Юнга ν, полученным из

диаграммы Юнга λ прибавлением m клеточек в различных столбцах. Например, $s_{(2,1)}s_{(2)} = s_{(4,1)} + s_{(3,2)} + s_{(3,1,1)} + s_{(2,2,1)}$.
c) Докажите, что ограничение $\mathbb{S}_{U_\nu}(\mathbb{C}^{d+1})$ с GL_{d+1} на GL_d является прямой суммой (с кратностями 1) $\mathbb{S}_{U_\lambda}(\mathbb{C}^d)$ по всем диаграммам Юнга λ, полученным из диаграммы Юнга ν вычеркиванием нескольких клеточек в различных столбцах.

6. Докажите, что $\mathrm{Sym}^\bullet(V \oplus \Lambda^2 V) = \bigoplus_\lambda V_\lambda$.

7. Пусть $K_{\mu\lambda}$ — числа Костки, т.е. $T_\lambda = \oplus_{\mu \geq \lambda} U_\mu^{K_{\mu\lambda}}$.
a) Докажите, что $T'_\lambda = \oplus_{\mu \leq \lambda} U_\mu^{K_{\mu^*\lambda^*}}$.
b) Докажите, что для разбиения $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r)$ имеем $\Lambda^{\mu_1} V \otimes \ldots \otimes \Lambda^{\mu_r} V = \bigoplus_{\lambda \geq \mu} V_{\lambda^*}^{K_{\lambda\mu}}$.

8. Пусть $\dim V = 2$. Докажите, что $\mathrm{Sym}^p(\mathrm{Sym}^q V) \simeq \mathrm{Sym}^q(\mathrm{Sym}^p V)$ как представления $GL(V)$ (*взаимность Эрмита*).